Über die Dynamik des Elektrons

Henri Poincaré

Vorgelegt: 23. Juli 1905; Gedruckt: 14.-16. Dezember 1905; Veröffentlicht Januar 1906; *†

Inhaltsverzeichnis

† Französisches Original: *Sur la dynamique de l'électron*. In: *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 21, 1906, S. 129-176. http://fr.wikisource.org/wiki/Sur_la_dynamique_de_l'électron_(juillet)

Einleitung

Zuerst scheint es so, dass die Aberration des Lichtes und damit verbundene optische und elektrische Phänomene uns die Möglichkeit geben werden, die absolute Bewegung der Erde zu bestimmen, und zwar nicht ihre Bewegung relativ zu den Sternen, sondern relativ zum Äther. Fresnel hatte es bereits versucht, aber er erkannte bald, dass die Erdbewegung die Gesetze der Brechung und Reflexion nicht verändert. Ähnliche Experimente, wie das eines mit Wasser gefüllten Teleskops, und all derjenigen welche keine Ausdrücke größer als der ersten Ordnung zur Aberration enthielten, erbrachten nur negative Resultate; die Erklärung war bald gefunden. Jedoch Michelson, der ein Experiment erdachte, welches empfindlich genug für vom Quadrat der Aberration abhängige Ausdrücke war, scheiterte ebenso.

Es scheint, dass die Unmöglichkeit der Erbringung eines experimentellen Nachweises der absoluten Bewegung der Erde ein allgemeines Naturgesetz ist; wir sind natürlich dazu geneigt dieses Gesetz anzunehmen, welches wir das *Postulat der Relativität* nennen und ohne Einschränkung anerkennen werden. Mag dieses Postulat, welches bis jetzt in Einklang mit der Erfahrung steht, entweder bestätigt oder später mit präziseren Experimenten widerlegt werden, es ist jedenfalls interessant zu untersuchen, welche Folgen sich daraus ergeben können.

Eine Erklärung ist durch Lorentz und Fitzgerald vorgeschlagen worden, welche die Hypothese der Kontraktion aller Körper in Bewegungsrichtung der Erde eingeführt haben - wobei diese proportional zum Quadrat der Aberration ist; diese Kontraktion, die wir die *Lorentz-Kontraktion* nennen werden, würde das Experiment von Michelson und alle anderen erklären, welche bis jetzt durchgeführt worden sind. Diese Hypothese würde jedoch ungenügend werden, wenn wir das Relativitätspostulat in seiner vollen Allgemeinheit anerkennen würden.

Lorentz hat dann versucht, seine Hypothese zur vervollständigen und zu verändern, um sie in völliger Übereinstimmung mit diesem Postulat zu bringen. Dies war es, was ihm in seinem Artikel gelang mit der Bezeichnung *Eletromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light* (*Proceedings* de l'Académie d'Amsterdam, 27. Mai 1904).

Die Wichtigkeit dieser Frage hat mich dazu bestimmt, sie wieder aufzunehmen; die Resultate, die ich erzielt habe stimmen mit denen von Hr. Lorentz in allen wichtigen Punkten überein; ich bin lediglich dazu gebracht worden, sie in wenigen Details zu ändern und zu vervollständigen; später wird man die Unterschiede sehen, welche von sekundärer Bedeutung sind.

Die Idee von Lorentz kann so zusammengefasst werden: wenn es uns möglich ist, eine Translation auf ein ganzes System zu übertragen ohne dass irgendein beobachtbares Phänomen geändert wird, wird das dadurch verursacht, dass die Gleichungen des elektromagnetischen Mediums durch bestimmte Transformationen nicht geändert werden, welche wir die *Lorentz-Transformationen* nennen werden. Zwei Systeme, von denen eines ruht und das andere bewegt ist, werden dabei exakte Abbilder voneinander.

Langevin[1] hat versucht, die Idee von Lorentz zu ändern; für die beiden Autoren erhält das bewegte Elektron die Form eines abgeplatteten Ellipsoiden, jedoch bei Lorentz bleiben zwei der Achsen des Ellipsoiden konstant, wogegen bei Langevin das Volumen konstant bleibt. Die beiden Wissenschaftler haben im Übrigen gezeigt, dass diese beiden Hypothesen mit den Experimenten von Kaufmann genauso übereinstimmen wie die ursprüngliche Hypothese von Abraham (starres, kugelförmiges Elektron).

Der Vorteil der Theorie von Langevin ist, dass sie nur elektromagnetische Kräfte und Bindungen benutzt; sie ist jedoch unvereinbar mit dem Relativitätspostulat; dies ist was Lorentz gezeigt hat, und dies ist es auch was ich auf eine andere Weise gefunden habe, welche auf die Gruppentheorie zurückgreift.

Man muss deshalb zur Theorie von Lorentz zurückkommen; wenn man diese Theorie jedoch bewahren und unakzeptable Widersprüche vermeiden will, muss man die Existenz einer speziellen Kraft annehmen, welche sowohl die Kontraktion als auch die Konstanz von zwei Achsen erklärt. Ich habe diese Kraft zu bestimmen versucht und herausgefunden, *dass sie mit einem konstanten externen Druck auf das verformbare und kompressible Elektron verglichen werden kann, und dessen Arbeit proportional zur Volumenänderung des Elektrons ist*.

Wenn die Trägheit der Materie ausschließlich elektromagnetischen Ursprungs wäre, wie man es allgemein nach dem Experiment von Kaufmann annimmt, und mit Ausnahme des eben von mir erwähnten konstanten Drucks alle Kräfte elektromagnetischen Ursprungs sind, dann kann das Relativitätspostulat in aller Strenge durchgeführt werden. Dies ist es, was ich durch eine sehr einfache Berechnung zeige, welche auf dem Prinzip der kleinsten Wirkung basiert.

[1] Hr. Bucherer aus Bonn, der vorher die selbe Idee vorgetragen hat, ist Langevin zuvorgekommen. (Siehe: Bucherer, *Mathematische Einführung in die Elektronentheorie*; August 1904. Teubner, Leipzig).

Doch das ist nicht alles. Lorentz hat es in der erwähnten Arbeit für notwendig erachtet seine Hypothese zu vervollständigen, damit das Postulat auch dann gültig bleibt, wenn es außer den elektromagnetischen noch andere Kräfte gibt. Nach ihm sind alle Kräfte, welchen Ursprung sie auch haben, durch die Lorentz-Transformation (und somit durch die Translation) auf die selbe Weise betroffen wie die elektromagnetischen Kräfte.

Es war notwendig, diese Hypothese näher zu untersuchen, und insbesondere danach zu suchen, zu welchen Änderungen sie uns beim Gravitationsgesetz bringen würde.

Man findet zuerst, dass sie uns dazu bringt anzunehmen, dass die Ausbreitung der Gravitation nicht augenblicklich, sondern mit Lichtgeschwindigkeit erfolgt. Man könnte denken, dass das ein ausreichender Grund ist um die Hypothese abzulehnen, da Laplace gezeigt hat dass dies nicht der Fall sein kann. Aber in Wirklichkeit wird die Wirkung der Ausbreitung größtenteils durch andere Ursachen kompensiert, sodass es keinen Widerspruch zwischen dem vorgeschlagenen Gesetz und den astronomischen Beobachtungen mehr gibt.

Ist es möglich, ein Gesetz zu finden, das der von Lorentz gegebenen Bedingung genügt, und das sich gleichzeitig immer auf Newtons Gesetz reduziert, wenn die Geschwindigkeiten der Himmelskörper ziemlich klein sind, damit man deren Quadrate (sowie das Produkt aus Beschleunigung und Entfernung) in Bezug zur Lichtgeschwindigkeit vernachlässigen kann?

Auf diese Frage müssen wir bejahend antworten, wie wir später sehen werden.

Ist das so geänderte Gesetz verträglich mit den astronomischen Beobachtungen?

Auf den ersten Blick scheint das der Fall zu sein, aber die Frage kann nur durch eine ausführlichere Diskussion entschieden werden.

Aber man stelle sich vor, dass die Frage zugunsten der neuen Hypothese entschieden worden ist; was sollen wir daraus folgern? Wenn die Ausbreitung der Gravitation mit Lichtgeschwindigkeit erfolgt, dann kann das nicht eine zufällige Übereinstimmung sein, sondern es ist so, weil es sich auch dabei um eine Funktion des Äthers handelt; und dann wird man versuchen müssen diese Funktion zu ergründen, und sie mit anderen Fluid-Funktionen in Verbindung zu bringen.

Wir können uns nicht einfach mit nebeneinander gestellten Formeln zufrieden geben, welche nur durch einen glücklichen Zufall übereinstimmen; es ist notwendig, dass es diese Formeln sozusagen schaffen, sich gegenseitig zu durchdringen. Der Geist wird nur dann zufrieden gestellt sein, wenn er glaubt den Grund dieser Übereinstimmung erkannt zu haben, und wenn der Glaube stark genug ist um die Illusion zu haben, dass er es hätte vorhersehen können.

Aber die Frage kann auch noch unter einem anderen Gesichtspunkt betrachtet werden, der sich besser mit einer Analogie darstellen lassen wird. Man nehme einen Astronomen, der vor Kopernikus gelebt hat und über das System von Ptolemäus nachdenkt; er wird bemerken, dass für alle Planeten einer der zwei Kreise, Epizykel oder Deferent, in derselben Zeit durchquert wird. Dies kann kein Zufall sein, und folglich muss es zwischen allen Planeten eine unbekannte Verbindung geben.

Jedoch Kopernikus, indem er einfach die als fest angenommenen Koordinatenachsen wechselt, lässt diese scheinbare Verbindung aus der Vorstellung verschwinden; jeder Planet beschreibt nur noch einen Kreis, und die Dauer der Umlaufbahn wird unabhängig (bis Kepler zwischen ihnen wieder die Verbindung herstellt, welche man zerstört zu haben geglaubt hat).

Es ist möglich, dass es hier etwas ähnliches gibt; wenn wir dem Relativitätspostulat zustimmen, würden wir im Gravitationsgesetz und in den elektromagnetischen Gesetzen eine gemeinsame Zahl finden, welche die Lichtgeschwindigkeit wäre; und wir würden sie noch in allen anderen Kräften, welchen Ursprung sie auch haben, wiederfinden. Das könnte nur auf zwei Arten erklärt werden:

Entweder ist alles im Universum elektromagnetischen Ursprungs.

Oder dieser Teil, der allen physischen Phänomenen sozusagen gemeinsam wäre, ist nur ein Anschein, etwas was an unseren Messverfahren liegen würde. Wie führen wir unsere Messungen durch? Die erste Antwort wäre, indem man unveränderlich-starr definierte Gegenstände transportiert und übereinander legt; aber in der aktuellen Theorie ist dies nicht mehr korrekt, wenn man die Lorentz-Kontraktion berücksichtigt. In dieser Theorie sind zwei Längen definitionsgemäß gleich, wenn sie vom Licht in der gleichen Zeit durchquert werden.

Vielleicht würde es ausreichen, einfach auf diese Definition zu verzichten, damit die Theorie von Lorentz gänzlich überwunden wäre, genauso wie es das System von Ptolemäus durch den Einwand von Kopernikus war. Sollte das eines Tages passieren, wird das jedoch nicht beweisen, dass die von Lorentz gemachte Anstrengung unnötig war; denn unabhängig davon was man darüber denkt, Ptolemäus war nicht unnütz für Kopernikus.

Auch habe ich nicht gezögert, diese wenigen Teilresultate zu veröffentlichen, obwohl in diesem Augenblick die Entdeckung der magnetischen Kathodenstrahlen die ganze Theorie zu gefährden scheint.

§ 1. Lorentz-Transformation

Lorentz benutzte ein bestimmtes System von Einheiten um die 4π-Faktoren in den Formeln zu vermeiden. Ich werde das selbe tun, und zusätzlich die Einheiten der Länge und Zeit auf eine Weise wählen, dass die Lichtgeschwindigkeit gleich 1 ist. Unter diesen Voraussetzungen - und der Einführung der Bezeichnungen für die elektrische Verschiebung f, g, h, die magnetische Kraft α, β, γ, das Vektorpotential F, G, H, das Skalarpotential ψ, die elektrische Dichte ρ, die Elektronengeschwindigkeit ξ, η, ζ, und den Strom u, v, w - erhalten die fundamentalen Formeln die Form:

$$(1) \qquad \begin{cases} u = \frac{df}{dt} + \rho\xi = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}, \quad \alpha = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}, \quad f = -\frac{dF}{dt} - \frac{d\psi}{dx}, \\ \frac{d\alpha}{dt} = \frac{dg}{dz} - \frac{dh}{dy}, \quad \frac{d\rho}{dt} + \sum \frac{d\rho\xi}{dx} = 0, \quad \sum \frac{df}{dx} = \rho, \quad \frac{d\psi}{dt} + \sum \frac{dF}{dx} = 0, \\ \Box = \Delta - \frac{d^2}{dt^2} = \sum \frac{d^2}{dx^2} - \frac{d^2}{dt^2}, \quad \Box\psi = -\rho, \quad \Box F = -\rho\xi. \end{cases}$$

Auf ein elementares Teilchen der Materie mit dem Volumen $dx\,dy\,dz$ wirkt eine mechanische Kraft, deren Komponenten $X\,dx\,dy\,dz$, $Y\,dx\,dy\,dz$, $Z\,dx\,dy\,dz$ abgeleitet werden können von der Formel :

$$(2) \qquad X = \rho f + \rho(\eta\gamma - \zeta\beta).$$

Diese Gleichungen sind verträglich mit einer bemerkenswerten, von Lorentz entdeckten Transformation, welche deswegen interessant ist, da sie erklärt warum kein Experiment ausreicht um uns etwas über die absolute Bewegung des Universums mitzuteilen. Es sei:

$$(3) \qquad x' = kl(x + \varepsilon t), \quad t' = kl(t + \varepsilon x), \quad y' = ly, \quad z' = lz,$$

wo l und ε zwei beliebige Konstanten sind, und

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}.$$

Wenn wir nun setzen:

$$\Box' = \sum \frac{d^2}{dx'^2} - \frac{d^2}{dt'^2},$$

ergibt sich:

$$\Box' = \Box l^{-2}.$$

Wir betrachten eine Sphäre, welche von einem Elektron in gleichförmiger Translation mitgeführt wird, und es sei:

$$(x - \xi t)^2 + (y - \eta t)^2 + (x - \zeta t)^2 = r^2,$$

die Gleichung für diese bewegliche Sphäre, deren Volumen $\frac{4}{3}\pi r^2$ ist.

Die Transformation wird die Sphäre in einen Ellipsoid verwandeln, wobei die Gleichung einfach zu finden ist. Wie leiten die Gleichungen einfach von (3) ab:

$$(3^{bis}) \qquad x = \frac{k}{l}(x' - \varepsilon t'), \quad t = \frac{k}{l}(t' - \varepsilon x'), \quad y = \frac{y'}{l}, \quad z = \frac{z'}{l}.$$

Die Gleichung des Ellipsoid wird so:

$$k^2(x' - \varepsilon t' - \xi t' + \varepsilon \xi x')^2 + (y' - \eta k t' + \eta k \varepsilon x')^2 + (z' - \zeta k t' + \zeta k \varepsilon x')^2 = l^2 r^2.$$

Dieser Ellipsoid wird in gleichförmige Bewegung versetzt; für $t' = 0$ reduziert sich die Gleichung zu:

$$k^2 x'^2 (1 + \xi \varepsilon)^2 + (y' + \eta k \varepsilon x')^2 + (z' + \zeta k \varepsilon x')^2 = l^2 r^2,$$

und für das Volumen:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \frac{l^3}{k(1 + \xi \varepsilon)}.$$

Wenn wir die Elektronenladung durch die Transformation unverändert lassen wollen, und wenn wir mit ρ' die neue Ladungsdichte benennen, ergibt sich:

$$(4) \qquad \rho' = \frac{k}{l^3}(\rho + \varepsilon \rho \xi).$$

Was werden nun die neuen Geschwindigkeitskomponenten ξ', η' und ζ' sein? Es muss sich ergeben:

$$\xi' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{d(x + \varepsilon t)}{d(t + \varepsilon x)} = \frac{\xi + \varepsilon}{1 + \varepsilon \xi},$$

$$\eta' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{kd(t + \varepsilon x)} = \frac{\eta}{k(1 + \varepsilon \xi)}, \quad \zeta' = \frac{\zeta}{k(1 + \varepsilon \xi)},$$

wodurch:

$$(4^{bis}) \qquad \rho' \xi' = \frac{k}{l^3}(\rho \xi + \varepsilon \rho), \quad \rho' \eta' = \frac{1}{l^3}\rho \eta, \quad \rho' \zeta' = \frac{1}{l^3}\rho \zeta.$$

Hier muss ich zum ersten Mal auf einen Unterschied zu Lorentz hinweisen. Lorentz setzt (im Gegensatz zu meiner Notierung) (Loco citato, Seite 813, Formeln 7 und 8):

$$\rho' = \frac{1}{kl^3}\rho, \quad \xi' = k^2(\xi + \varepsilon), \quad \eta' = k\eta, \quad \zeta' = k\zeta.$$

Wir erhalten also die Formeln wieder:

$$\rho' \xi' = \frac{k}{l^3}(\rho \xi + \varepsilon \rho), \quad \rho' \eta' = \frac{1}{l^3}\rho \eta, \quad \rho' \zeta' = \frac{1}{l^3}\rho \zeta;$$

jedoch der Wert von ρ' ist unterschiedlich.

Es ist wichtig zu bemerken, dass die Formeln (4) und (4^{bis}) die Bedingung der Kontinuität erfüllen

$$\frac{d\rho'}{dt'} + \sum \frac{d\rho'\xi'}{dx'} = 0.$$

Tatsächlich, es sei λ eine unbestimmte Größe und D die Funktionsdeterminante von

$$(5) \qquad t+\lambda\rho, \quad x+\lambda\rho\xi, \quad x+\lambda\rho\eta, \quad z+\lambda\rho\zeta$$

in Bezug auf $t,\ x,\ y$ und z. Wir haben:

$$D = D_0 + D_1\lambda + D_2\lambda^2 + D_3\lambda^3 + D_4\lambda^4,$$

mit $D_0 = 1$, $D_1 = \frac{d\rho}{dt} + \sum \frac{d\rho\xi}{dx} = 0$.

Es sei $\lambda' = l^2\lambda$; wir wollen, dass die 4 Funktionen

$$(5^{bis}) \qquad t'+\lambda'\rho', \quad x'+\lambda'\rho'\xi', \quad y'+\lambda'\rho'\eta', \quad z'+\lambda'\rho'\zeta'$$

mit den Funktionen (5) durch die gleichen linearen Beziehungen verknüpft sind, wie die ursprünglichen Variablen mit den neuen Variablen. Wenn wir also mit D' die Funktionsdeterminante der Funktionen (5^{bis}) in Bezug zu den neuen Variablen bezeichnen, so haben wir:

$$D' = D, \quad D' = D'_0 + D'_1\lambda' + ... + D'_4\lambda'^4,$$

wodurch:

$$D'_0 = D_0 = 1, \quad D'_1 = l^{-2}D_1 = 0 = \frac{d\rho'}{dt'} + \sum \frac{d\rho'\xi'}{dx'}. \text{ C. Q. F. D}$$

Mit der Hypothese von Lorentz würde diese Bedingung nicht erfüllt sein, da ρ' nicht den selben Wert hat.

Wir werden die neuen Vektor- und Skalar-Potentiale so definieren, damit die Bedingung erfüllt ist:

$$(6) \qquad \Box'\psi' = -\rho', \quad \Box'F' = -\rho'\xi'.$$

Wir leiten folglich ab:

$$(7) \qquad \psi' = \frac{k}{l}(\psi + \varepsilon F), \quad F' = \frac{k}{l}(F + \varepsilon\psi), \quad G' = \frac{1}{l}G, \quad H' = \frac{1}{l}H.$$

Diese Formeln weichen merklich von denen von Lorentz ab, obwohl der Unterschied nur von den Definitionen der letzten Analyse herrührt.

Wir wählen die neuen elektrischen und magnetische Felder auf eine Weise, um die Gleichungen zu erfüllen:

$$(8) \qquad f' = -\frac{dF'}{dt'} - \frac{d\psi'}{dx'}, \quad \alpha' = \frac{dH'}{dy'} - \frac{dG'}{dz'}.$$

Es ist leicht zu sehen, dass:

$$\frac{d}{dt'} = \frac{k}{l}\left(\frac{d}{dt} - \varepsilon\frac{d}{dx}\right), \quad \frac{d}{dx'} = \frac{k}{l}\left(\frac{d}{dx} - \varepsilon\frac{d}{dt}\right), \quad \frac{d}{dy'} = \frac{1}{l}\frac{d}{dy}, \quad \frac{d}{dz'} = \frac{1}{l}\frac{d}{dz}$$

und wir schließen:

$$(9) \qquad \begin{cases} f' = \frac{1}{l^2}f, \quad g' = \frac{k}{l^2}(g+\varepsilon\gamma), \quad h' = \frac{k}{l^2}(h+\varepsilon\beta), \\ \alpha' = \frac{1}{l^2}\alpha, \quad \beta' = \frac{k}{l^2}(\beta+\varepsilon h), \quad \gamma' = \frac{k}{l^2}(\gamma+\varepsilon g). \end{cases}$$

Diese Formeln sind identisch mit denen von Lorentz.

Unsere Transformation verändert die Gleichungen (1) nicht. Tatsächlich ist die Bedingung der Kontinuität, auch die Gleichungen (6) und (8), bereits in den Gleichungen (1) ausgedrückt (von den gestrichenen abgesehen).

Die Gleichungen (6) zusammen mit der Bedingung der Kontinuität, ergeben:

$$(10) \qquad \frac{d\psi'}{dt'} + \sum\frac{dF'}{dx'} = 0.$$

Es bleibt festzustellen, dass:

$$\frac{df'}{dt'} + \rho'\xi' = \frac{d\gamma'}{dy'} - \frac{d\beta'}{dz'}, \quad \frac{dz'}{dt'} = \frac{dg'}{dz'} - \frac{dh'}{d'}, \quad \sum\frac{df'}{dx'} = \rho'$$

und es ist leicht zu sehen, dass sie notwendige Konsequenzen der Gleichungen (6), (8) und (10) sind.

Wir müssen jetzt die Kräfte vor und nach der Transformation vergleichen.

Es sei $X,\ Y,\ Z$ die Kraft vor der Transformation, und $X',\ Y',\ Z'$ die Kraft nach der Transformation, wobei beide Kräfte in Bezug zur Volumeneinheit gesetzt werden. Damit X' die selben Gleichungen erfüllt wie vor der Transformation, muss sich ergeben:

$$X' = \rho' f' + \rho'(\eta'\gamma' - \zeta'\beta'),$$
$$Y' = \rho' f' + \rho'(\zeta'\alpha' - \xi'\gamma'),$$
$$X' = \rho' h' + \rho'(\xi'\beta' - \eta'\alpha'),$$

oder, indem alle Größen durch die Werte (4), (4 bis) und (9) ersetzt werden, und unter Berücksichtigung der Gleichungen (2):

$$(11) \qquad \begin{cases} X' = \frac{k}{l^5}(X + \varepsilon\sum X\xi), \\ Y' = \frac{1}{l^5}Y, \\ Z' = \frac{1}{l^5}Z. \end{cases}$$

Wenn wir die Kraftkomponenten X_1, Y_1, Z_1 nicht mehr auf die Volumeneinheit beziehen, sondern auf die Einheit der elektrischen Ladung des Elektrons, und X_1', Y_1', Z_1' die selben Größen nach der Transformation sind, erhalten wir:

$$X_1 = f + \eta\gamma - \zeta\beta, \quad X_1' = f' + \eta'\gamma' - \zeta'\beta', \quad X = \rho X_1, \quad X' = \rho' X_1'$$

und wir erhalten die Gleichungen:

$$(11^{bis}) \qquad \begin{cases} X_1' = \dfrac{k}{l^5}\dfrac{\rho}{\rho'}(X_1 + \varepsilon \sum X_1 \xi), \\[2ex] Y_1' = \dfrac{1}{l^5}\dfrac{\rho}{\rho'} Y_1, \\[2ex] Z_1' = \dfrac{1}{l^5}\dfrac{\rho}{\rho'} Z_1. \end{cases}$$

Lorentz fand (mit anderen Notationen, Seite 813, Gl. (10)):

$$(11^{ter}) \qquad \begin{cases} X_1 = l^2 X_1' - l^2\varepsilon(\eta' g' + \zeta' h'), \\[2ex] Y_1 = \dfrac{l^2}{k} Y_1' + \dfrac{l^2\varepsilon}{k}\xi' g', \\[2ex] Z_1 = \dfrac{l^2}{k} Z_1' + \dfrac{l^2\varepsilon}{k}\xi' h'. \end{cases}$$

Bevor man weiter gelangen kann, ist es wichtig die Quelle dieser beträchtlichen Abweichung zu bestimmen. Sie rührt offensichtlich von der Tatsache her, dass die Formeln für ξ', η' und ζ' nicht die selben sind, während die Formeln für die elektrischen und magnetischen Felder die selben sind.

Wenn die Trägheit der Elektronen ausschließlich elektromagnetischen Ursprungs ist, und wenn sie zusätzlich nur von Kräften elektromagnetischen Ursprungs beeinflusst werden, dann erfordern die Gleichgewichtsbedingungen, dass sich im Innern der Elektronen ergibt:

$$X = Y = Z = 0$$

Durch Gebrauch der Gleichungen (11) sind diese Beziehungen äquivalent mit

$$X' = Y' = Z' = 0.$$

Die Gleichgewichtsbedingungen der Elektronen werden also nicht durch die Transformation geändert.

Leider ist solch eine einfache Hypothese unzulässig. Tatsächlich, wenn wir annehmen dass $\xi = \eta = \zeta = 0$, führen die Bedingungen $X = Y = Z = 0$ zu $f = g = h = 0$, und folglich zu $\sum \dfrac{df}{dx} = 0$, das heißt $\rho = 0$. Wir gelangen zu analogen Resultaten beim allgemeinsten Fall. Wir müssen folglich zugeben, dass es jenseits der elektromagnetischen Kräften auch andere Kräfte und Bindungen gibt. Deshalb müssen wir nach den Bedingungen suchen, welche diese Kräfte oder Bindungen erfüllen müssen, um das Elektronengleichgewicht durch die Transformation ungestört zu lassen. Das wird Gegenstand eines späteren Abschnitts sein.

§ 2. Prinzip der kleinsten Wirkung

Wir wissen wie Lorentz seine Gleichungen aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung ableitete. Obwohl ich der Analyse von Lorentz nichts Grundlegendes hinzuzufügen habe, werde ich jedoch erneut zu dieser Frage zurückkommen, weil ich es vorziehe sie in einer etwas anderen Form darzustellen, die mir für meinen Gegenstand nützlich sein wird. Ich setze:

$$(1) \qquad J = \int dt\, d\tau \left[\frac{\sum f^2}{2} + \frac{\sum \alpha^2}{2} - \sum F u \right],$$

angenommen $f,\ \alpha,\ F,\ u$, etc. sind folgenden und den entsprechend abgeleiteten Bedingungen unterworfen:

$$(2) \qquad \Sigma \frac{df}{dx} = \rho, \quad \alpha = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}, \quad u = \frac{df}{dt} + \rho\xi.$$

Der Integral J muss erweitert werden in Bezug:

1° auf das Volumenelement $d\tau = dx\, dy\, dz$, dem gesamten Raum.

2° zur Zeit t innerhalb der Grenzen $t = t_0,\ t = t_1$.

Gemäß dem Prinzip der kleinsten Wirkung muss der Integral J minimal sein, wenn man die verschiedenen Größen festsetzt, welche enthalten sind:

1° in den Bedingungen (2);

2° in der Bedingung, dass der Zustand des Systems bestimmt wird durch die beiden begrenzenden Zeitabschnitte $t = t_0,\ t = t_1$.

Diese letzte Bedingung erlaubt uns die Transformation unserer Integrale durch partielle Integration in Bezug zur Zeit. Wenn wir tatsächlich einen Integral haben von der Form

$$\int dt\, d\tau A \frac{dB\delta C}{dt},$$

wo C eine der Größen ist, welche den Zustand des Systems definiert, und δC ihre Variation ist, dann werden sie (durch partielle Integration in Bezug zur Zeit) gleich sein mit:

$$\int d\tau \mid AB\delta C \mid_{t=t_0}^{t=t_1} - \int dt\, d\tau \frac{dA}{dt} dB\delta C.$$

Da der Zustand des Systems durch die zwei begrenzenden Zeitabschnitte bestimmt ist, haben wir $\delta C = 0$ für $t = t_0,\ t = t_1$; also der erste Integral, welcher sich auf die beiden Zeitabschnitten bezieht, ist gleich Null, und nur der zweite verbleibt.

Wir können ebenso in Bezug auf $x,\ y$ oder z partiell integrieren; tatsächlich haben wir dann:

$$\int A \frac{dB}{dx} dx\, dy\, dt = \int AB\, dy\, dz\, dt - \int B \frac{dA}{dx} dx\, dy\, dz\, dt.$$

Unsere Integrationen erweitern sich ins Unendliche, wir müssen $x = \pm\infty$ im ersten Integral auf der rechten Seite setzen; also - da wir immer angenommen haben, dass alle unsere Funktionen bei Unendlichkeit verschwinden - wird dieser Integral gleich null, und es ergibt sich

$$\int A \frac{dB}{dx} d\tau\, dt = -\int B \frac{dA}{dx} d\tau\, dt.$$

Wenn das System angenommenerweise eine Bindung eingeht, müsste man diese Bindungsbedingungen zu den Bedingungen hinzufügen, welche vorgegeben sind durch die verschiedenen Größen, die im Integral J dargestellt sind.

Lasst uns zuerst zu $F,\ G,\ H$ ihre Steigerungen $\delta F,\ \delta G,\ \delta H$ setzen; sodass:

$$\delta\alpha = \frac{d\delta H}{dy} - \frac{d\delta G}{dz}.$$

Wir müssen haben:

$$\delta J = \int dt\ d\tau\left[\sum\alpha\left(\frac{d\delta H}{dy} - \frac{d\delta G}{dz}\right) - \sum u\delta F\right] = 0,$$

oder durch partielle Integration,

$$\delta J = \int dt\ d\tau\left[\sum\left(\delta G\frac{d\alpha}{dz} - \delta H\frac{d\alpha}{dy}\right) - \sum u\delta F\right] =$$

$$= -\int dt\ d\tau\sum\delta F\left(u - \frac{d\gamma}{dy} + \frac{d\beta}{dz}\right) = 0,$$

sodass, indem ein beliebiger Koeffizient δF mit Null gleichgesetzt wird

$$(3) \qquad u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}.$$

Diese Beziehung gibt uns (durch partielle Integration):

$$\int\sum Fud\tau = \int\sum F\left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}\right)d\tau = \int\sum\left(\beta\frac{dF}{dz} - \gamma\frac{dF}{dy}\right)d\tau = \int\sum\alpha\left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}\right)d\tau,$$

oder

$$\int\sum Fud\tau = \int\sum\alpha^2 d\tau,$$

sodass schließlich:

$$(4) \qquad J = \int dt\ d\tau\left(\frac{\sum f^2}{2} - \frac{\sum\alpha^2}{2}\right).$$

Von nun an, dank der Beziehung (3), ist δJ unabhängig von δF und folglich auch von $\delta\alpha$; wir können jetzt die anderen Variablen variieren.

Es ergibt sich, bei erneutem Auftauchen des Ausdrucks (1) von J,

$$\delta J = \int dt\ d\tau\left(\sum f\delta f - \sum F\delta u\right).$$

Aber $f,\ g,\ h$ sind der ersten der Bedinungen (2) unterworfen, sodass:

$$(5)\ \sum\frac{d\delta f}{dx} = \delta\rho,$$

und das kann geschrieben werden:

$$(6) \qquad \delta J = \int dt\, d\tau \left[\sum f df - \sum F \delta u - \psi \left(\sum \frac{d\delta f}{dx} - \delta\rho \right) \right].$$

Das Prinzip der Variationsrechnung lehrt uns, dass wir die Rechnung so durchführen können also ob ψ eine beliebige Funktion ist, als ob δJ durch Ausdruck (6) dargestellt wird, und als ob die Variationen nicht mehr der Bedingung (5) unterworfen sind.

Wir erhalten andererseits

$$\delta u = \frac{d\delta f}{dt} + \delta\rho\xi,$$

wobei durch partielle Integration,

$$(7) \qquad \delta J = \int dt\, d\tau \sum \delta f \left(f + \frac{dF}{dt} + \frac{d\psi}{dx} \right) + \int dt\, d\tau (\psi\delta\rho - \sum F \delta\rho\xi).$$

Wenn wir zuerst annehmen, dass die Elektronen keine Variation erfahren, dann ist $\delta\rho = \delta\rho\xi = 0$ und der zweite Integral ist Null. Da δJ aufgehoben sein muss, ergibt sich:

$$(8) \qquad f + \frac{dF}{dt} + \frac{d\psi}{dx} = 0.$$

Es bleibt also im allgemeinen Fall:

$$(9) \qquad \delta J = \int dt\, d\tau (\psi\delta\rho - \sum F \delta\rho\xi).$$

Es bleiben noch die Kräfte zu bestimmen, welche auf die Elektronen ausgeübt werden. Um dies zu tun müssen wir annehmen, dass auf jedem Element des Elektrons eine zusätzliche Kraft $-Xd\tau, -Yd\tau, -Zd\tau$ wirkt, und setzen fest, dass dieser Kraft die elektromagnetischen Kräfte im Gleichgewicht halten soll. Es seien $U,\ V,\ W$ die Verschiebungskomponenten des Elements $d\tau$ des Elektrons, wobei die Verschiebung von einer beliebigen ursprünglichen Position ausgehend berechnet wird. Es seien $\delta U,\ \delta V,\ \delta W$ die Variationen der Verschiebung; der virtuelle Weg entspricht der zusätzlichen Kraft mit:

$$-\int \sum X \delta U\, d\tau,$$

sodass die Gleichgewichtsbedingung, von der wir gerade gesprochen haben, lautet:

$$(10) \qquad \rho J = -\int \sum X \delta U\, d\tau\, dt.$$

Es geht um die Transformation von δJ. Um mit der Suche nach der Kontinuitätsgleichung zu beginnen, drücken wir aus wie die Ladung des Elektrons bei der Variation erhalten bleibt.

Es sei $x_0,\ y_0,\ z_0$ die ursprüngliche Position des Elektrons. Seine aktuelle Position wird sein:

$$x = x_0 + U, \quad y = y_0 + V, \quad z = z_0 + W.$$

Wir führen außerdem eine Hilfsvariable ε ein, welche die Variationen unserer unterschiedlichen Funktionen auf eine Weise erzeugt, dass sich für eine beliebige Funktion A ergibt:

$$\delta A = \delta\varepsilon \frac{dA}{d\varepsilon}.$$

Es würde tatsächlich bequem sein, in der Notation der Variationsrechung, wie der gewöhnlichen Differentialrechnung, oder umgekehrt, fortfahren zu können.

Unsere Funktionen können betrachtet werden: 1° als abhängig von den fünf Variablen $x,\ y,\ z,\ t,\ \varepsilon$, sodass wir weiterhin den selben Ort beibehalten wenn t und ε sich verändern: wir bezeichnen ihre Ableitungen mit dem gewöhnlichen d; 2° als abhängig von den fünf Variablen $x_0,\ y_0,\ z_0,\ t,\ \varepsilon$, sodass wir immer dem selben Elektron folgen, wenn t und ε sich verändern; wir bezeichnen ihre Ableitungen mit ∂. Es folgt dann:

$$(11) \qquad \xi = \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{dU}{dt} + \xi \frac{dU}{dx} + \eta \frac{dU}{dy} + \zeta \frac{dU}{dz} = \frac{\partial x}{\partial t}.$$

Wir bezeichnen weiterhin mit Δ die Funktionsdeterminante von $x,\ y,\ z$ in Bezug auf $x_0,\ y_0,\ z_0$:

$$\Delta = \frac{\partial(x,\ y,\ z)}{\partial(x_0,\ y_0,\ z_0)}.$$

Wenn $\varepsilon,\ x_0,\ y_0,\ z_0$ konstant verbleiben und wir zu t die Steigerung ∂t hinzufügen, dann ergeben sich für $x,\ y,\ z$ die Steigerungen $\partial x,\ \partial y,\ \partial z$, und für Δ die Steigerung $\partial\Delta$, und es ergibt sich:

$$\partial x = \xi \partial t, \quad \partial xy = \eta \partial t, \quad \partial z = \zeta \partial t,$$

$$\Delta + \partial\Delta = \frac{\partial(x+\partial x,\ y+\partial y,\ z+\partial z}{\partial(x_0,\ y_0,\ z_0)};$$

wodurch

$$1 + \frac{\partial\Delta}{\Delta} = \frac{\partial(x+\partial x,\ y+\partial y,\ z+\partial z}{\partial(x,\ y,\ z)} = \frac{\partial(x+\xi\partial t,\ y+\eta\partial t,\ z+\zeta\partial t}{\partial(x,\ y,\ z)}.$$

Wir leiten ab:

$$(12) \qquad \frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial t} = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}.$$

Die Masse jedes Elektrons verbleibt unverändert durch setzen von:

$$(13) \qquad \frac{\partial\rho\Delta}{\partial t} = 0,$$

wodurch

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum \rho \frac{d\xi}{dx} = 0, \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{d\rho}{dt} + \sum \xi \frac{d\rho}{dx}, \quad \frac{d\rho}{dt} + \sum \frac{d\rho\xi}{dx} = 0.$$

Dies sind die verschiedenen Formen der Kontinuitätsgleichung in Bezug zu Variable t. Wir erhalten analoge Formen in Bezug zu Variable ε. Es sei:

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial\varepsilon}\delta\varepsilon, \quad \delta V = \frac{\partial V}{\partial\varepsilon}\delta\varepsilon, \quad \delta W = \frac{\partial W}{\partial\varepsilon}\delta\varepsilon;$$

es ergibt sich:

$$(11^{bis}) \qquad \delta U = \frac{dU}{d\varepsilon}\delta\varepsilon + \delta U\frac{dU}{dx} + \delta V = \frac{dU}{dy} + \delta W\frac{dU}{dz},$$

$$(12^{bis}) \qquad \frac{1}{\triangle}\frac{\partial\triangle}{\partial\varepsilon} = \sum\frac{dU}{d\varepsilon}, \quad \frac{\partial\rho\triangle}{\partial\varepsilon} = 0,$$

$$(13^{bis}) \qquad \delta\varepsilon\frac{\partial\rho}{\partial\varepsilon} + \sum\rho\frac{d\rho U}{dx} = 0, \quad \frac{\partial\rho}{\partial\varepsilon} = \frac{d\rho}{d\varepsilon} + \sum\frac{\delta U}{\delta\varepsilon}\frac{d\rho}{dx}, \quad \delta\rho + \frac{d\rho\delta U}{dx} = 0.$$

Beachte die Differenz zwischen der Defintion von $\delta U = \frac{dU}{d\varepsilon}\delta\varepsilon$ und jener von $\delta\rho = \frac{d\rho}{d\varepsilon}\delta\varepsilon$; beachte dass es die Definition von δU ist, welcher der Formel (10) entspricht.

Die letzte Gleichung wird es uns erlauben, den ersten Ausdruck von (9) zu transformieren; wir erhalten tatsächlich:

$$\int dt\, d\tau\ \psi\delta\rho = -\int dt\, d\tau\ \psi\sum\frac{d\rho\delta U}{dx},$$

oder durch partielle Integration,

$$(14^{bis}) \qquad \int dt\, d\tau\ \psi\delta\rho = \int dt\, d\tau\sum\rho\frac{d\psi}{dx}\delta U.$$

Wir schlagen nun vor zu bestimmen

$$\delta(\rho\xi) = \frac{d(\rho\xi)}{d\varepsilon}d\varepsilon.$$

Beachte, dass $\delta\Delta$ nur von $x_0,\ y_0,\ z_0$ abhängen kann; tatsächlich, wenn wir einen Abschnitt des Elektrons betrachten, dessen ursprünglichen Position ein Parallelepiped-Rechteck mit den Kanten $dx_0,\ dy_0,\ dz_0$ ist, dann ist die Ladung dieses Abschnitts:

$$\rho\Delta dx_0\, dy_0\, dz_0$$

und dessen Ladung muss konstant bleiben, wodurch:

$$(15) \qquad \frac{\partial\rho\triangle}{\partial t} = \frac{\partial\rho\triangle}{\partial\varepsilon} = 0.$$

Daraus folgt:

$$(16) \qquad \frac{\partial\rho\Delta U}{\partial t\,\partial\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\rho\Delta\frac{\partial U}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\triangle\frac{\partial U}{\partial\varepsilon}\right).$$

Aber man weiß, dass - durch die Kontinuitätsgleichung - für eine beliebige Funktion A gesetzt werden kann:

$$\frac{1}{\Delta}\frac{\partial A\Delta}{\partial t} = \frac{dA}{dt} + \sum\frac{dA\xi}{dx}$$

und ebenso

$$\frac{1}{\triangle}\frac{\partial A\triangle}{\partial \varepsilon} = \frac{dA}{d\varepsilon} + \sum \frac{dA\dfrac{\partial U}{\partial \varepsilon}}{dx}.$$

Man hat also:

$$(17) \qquad \frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\rho\Delta\frac{\partial U}{\partial t}\right) = \frac{d\rho\dfrac{\partial U}{\partial t}}{d\varepsilon} + \frac{d\left(\rho\dfrac{\partial U}{\partial t}\dfrac{\partial U}{\partial \varepsilon}\right)}{dx} + \frac{d\left(\rho\dfrac{\partial U}{\partial t}\dfrac{\partial V}{\partial \varepsilon}\right)}{dy} + \frac{d\left(\rho\dfrac{\partial U}{\partial t}\dfrac{\partial W}{\partial \varepsilon}\right)}{dz},$$

$$(17^{bis}) \qquad \frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\Delta\frac{\partial U}{\partial \varepsilon}\right) = \frac{d\rho\dfrac{\partial U}{\partial \varepsilon}}{dt} + \frac{d\left(\rho\dfrac{\partial U}{\partial t}\dfrac{\partial U}{\partial \varepsilon}\right)}{dx} + \frac{d\left(\rho\dfrac{\partial V}{\partial t}\dfrac{\partial U}{\partial \varepsilon}\right)}{dy} + \frac{d\left(\rho\dfrac{\partial W}{\partial t}\dfrac{\partial U}{\partial \varepsilon}\right)}{dz}.$$

Der zweite Teil von (17) und (17 bis) muss gleich sein, wenn man sich erinnert, dass

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \xi, \quad \frac{\partial U}{\partial \varepsilon}\delta\varepsilon = \delta U, \quad \frac{d\rho\xi}{d\varepsilon}\delta\varepsilon = \delta\rho\xi,$$

es ergibt sich:

$$(18) \qquad \delta\rho\xi + \frac{d(\rho\xi\delta U)}{dx} + \frac{d(\rho\xi\delta V)}{dy} + \frac{d(\rho\xi\delta W)}{dz} = \frac{d(\rho\delta U)}{dt} + \frac{d(\rho\xi\delta U)}{dx} + \frac{d(\rho\eta\delta U)}{dy} + \frac{d(\rho\zeta\delta U)}{dz}.$$

Wir transformieren nun den zweiten Ausdruck von (9); es ergibt sich:

$$\int dt\ d\tau \sum F\delta\rho\xi$$

$$= \int dt\ d\tau\left[\sum F\frac{d(\rho\delta U)}{dt} + \sum F\frac{d(\rho\eta\delta U)}{dy} + \frac{d(\rho\zeta\delta U)}{dyz} - \frac{d(\rho\xi\delta V)}{dy} - \frac{d(\rho\xi\delta W)}{dz}\right].$$

Der zweite Teil ergibt durch partielle Integration:

$$\int dt\ d\tau\left[-\sum\rho\delta U\frac{dF}{dt} - \sum\rho\eta\delta U\frac{dF}{dy} - \sum\rho\zeta\delta U\frac{dF}{dz} + \sum\rho\xi\delta V\frac{dF}{dy} + \sum\rho\xi\delta W\frac{dF}{dz}\right].$$

Nun beachte dass:

$$\sum\rho\xi\delta V\frac{dF}{dy} = \sum\rho\zeta\delta U\frac{dH}{dx}, \quad \sum\rho\xi\delta W\frac{dF}{dz} = \sum\rho\eta\delta U\frac{dG}{dx}.$$

Tatsächlich, wenn in den beiden Teilen dieser Beziehungen $\sum$ entwickelt wird, werden sie identisch; und wir erinnern uns, dass

$$\frac{dH}{dx} - \frac{dF}{dz} = -\beta, \quad \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy} = \gamma,$$

der zweite in Frage kommende Teil ergibt:

$$\int dt\, d\tau \left[-\sum \rho \delta U \frac{dF}{dt} - \sum \rho \gamma \eta \delta U - \sum \rho \beta \zeta \delta U \right],$$

sodass zum Schluss:

$$\delta J = \int dt\, d\tau \sum \rho \delta U \left(\frac{d\psi}{dx} + \frac{dF}{dt} + \beta\zeta - \gamma\eta \right) = \int dt\, d\tau \sum \rho \delta U \left(-f + \beta\zeta - \gamma\eta \right).$$

Ebenso ergibt der Koeffizient von δU im zweiten Teil von (10):

$$X = f - \beta\zeta + \gamma\eta.$$

Das ist Gleichung (2) des vorhergehenden §.

§ 3. Die Lorentz-Transformation und das Prinzip der kleinsten Wirkung

Lasst uns sehen ob uns das Prinzip der kleinsten Wirkung den Grund für den Erfolg der Lorentz-Tranformation aufzeigt. Wir müssen zuerst die Transformation des Integral betrachten:

$$J = \int dt\, d\tau \left(\frac{\sum f^2}{2} - \frac{\sum \alpha^2}{2} \right)$$

(Formeln 4 von §2).

Wir finden zuerst

$$dt'\, d\tau' = l^4 dt\, d\tau,$$

weil x', y', z', t' mit x, y, z, t durch lineare Beziehungen verknüpft sind, deren Determinante gleich l^4 ist; es ergibt sich folglich:

$$(1) \qquad \begin{cases} l^4 \sum f'^2 = f^2 + k^2(g^2+h^2) + k^2\varepsilon^2(\beta^2+\gamma^2) + 2k^2\varepsilon(g\gamma - h\beta) \\ l^4 \sum \alpha'^2 = \alpha^2 + k^2(\beta^2+\gamma^2) + k^2\varepsilon^2(g^2+h^2) + 2k^2\varepsilon(g\gamma - h\beta) \end{cases}$$

(Formeln 9 von §1), wodurch:

$$l^4 \left(\sum f'^2 - \sum \alpha'^2 \right) = \sum f^2 - \sum \alpha^2;$$

sodass, wenn man setzt:

$$J' = \int dt'\, d\tau' \left(\frac{\sum f'^2}{2} - \frac{\sum \alpha'^2}{2} \right),$$

es sich ergibt:

$$J' = J.$$

Damit jedoch diese Gleichheit gerechtfertigt ist, müssen jedenfalls die Grenzen der Integration die selben sein; bislang haben wir zugelassen, dass t von t_0 bis zu t_1 variiert, und x, y, z von $-\infty$ bis $+\infty$. Bei dieser Rechnung würden die Grenzen der Integration durch die Lorentz-Transformation beeinflusst werden; aber nichts hindert uns daran anzunehmen, dass $t_0 = -\infty$, $t_1 = +\infty$; mit diesen Bedingungen sind die Grenzen für J und für J' die selben.

Wir werden dann die beiden folgenden Gleichungen auf analoge Weise vergleichen wie Gleichung (10) des §2:

$$(2) \qquad \begin{cases} \delta J = -\int \sum X \delta U \; d\tau \; dt \\ \\ \delta J = -\int \sum X' \delta U' \; d\tau' \; dt'. \end{cases}$$

Dafür muss zuerst $\delta U'$ mit δU verglichen werden.

Wir betrachten ein Elektron, dessen ursprüngliche Koordinaten $x_0,\ y_0,\ z_0$ sind; seine Koordinaten zum Zeitpunkt t sind

$$x = x_0 + U, \quad y_0 + V, \quad z_0 + W.$$

Wenn man ein entsprechendes Elektron nach der Lorentz-Transformation betrachtet, ergeben sich die Koordinaten

$$x' = kl\,(x + \varepsilon t)\,, \quad y' = ly, \quad z' = lz,$$

wo

$$x' = x_0 + U', \quad y' = y_0 + V', \quad z' = z_0 + W';$$

aber es erreicht diese Koordinaten nur zum Zeitpunkt

$$t' = kl\,(t + \varepsilon x).$$

Wenn unsere Variablen den Variationen $\delta U,\ \delta V,\ \delta W$ unterworfen sind, und wenn wir gleichzeitig zu t die Steigerung δt hinzufügen, dann werden die Koordinaten x, y, z einer gesamten Steigerung unterworfen sein von

$$\delta x = \delta U + \xi \delta t, \quad \delta y = \delta V + \eta \delta t, \quad \delta z = \delta W + \xi \delta t.$$

Wir erhalten ebenso:

$$\delta x' = \delta U' + \xi' \delta t', \quad \delta y' = \delta V' + \eta' \delta t', \quad \delta z' = \delta W' + \zeta' \delta t'$$

und durch Gebrauch der Lorentz-Transformation:

$$\delta x' = kl\,(\delta x + \varepsilon \delta t)\,, \quad \delta y' = l \delta y, \quad \delta z' = l \delta z, \quad \delta t' = kl\,(\delta t + \varepsilon \delta x),$$

wodurch, unter Annahme von $\delta t = 0$, sich die Beziehungen ergeben:

$$\delta x' = \delta U' + \xi' \delta t' = kl \delta U,$$

$$\delta y' = \delta V' + \eta' \delta t' = l \delta V,$$

$$\delta t' = kl\varepsilon\delta U.$$

Beachte, dass

$$\xi' = \frac{\xi+\varepsilon}{1+\xi\varepsilon}, \quad \eta' = \frac{\eta}{k(1+\xi\varepsilon)};$$

es ergibt sich durch Ersetzung von $\delta t'$ mit dem Wert,

$$kl(1+\xi\varepsilon)\delta U = \delta U'(1+\xi\varepsilon)+(\xi+\varepsilon)kl\varepsilon\delta U,$$
$$l(1+\xi\varepsilon)\delta V = \delta V'(1+\xi\varepsilon)+\eta l\varepsilon\delta U.$$

Wenn wir uns an die Definition von k erinnern, erhalten wir:

$$\delta U = \frac{k}{l}\delta U' + \frac{k\varepsilon}{l}\xi\delta U',$$
$$\delta V = \frac{1}{l}\delta V' + \frac{k\varepsilon}{l}\eta\delta U',$$

und ebenso

$$\delta W = \frac{1}{l}\delta W' + \frac{k\varepsilon}{l}\zeta\delta U';$$

wodurch

$$(3) \qquad \sum X\delta U = \frac{1}{l}\left(kX\delta U' + Y\delta V' + Z\delta W'\right) + \frac{k\varepsilon}{l}\delta U'\sum X\xi.$$

Jedoch durch Gebrauch von Gleichung (2) sollte sich ergeben:

$$\int\sum X'\delta U' dt'\, d\tau' = \int\sum X\delta U\; dt\; d\tau = \frac{1}{l^4}\sum X\delta U\; dt'\; d\tau'.$$

Durch Ersetzung von $\sum X\delta U$ mit dem Wert (3) und durch Gleichsetzung, ergibt sich:

$$X' = \frac{k}{l^5}X + \frac{k\varepsilon}{l^5}\sum X\xi, \quad Y' = \frac{1}{l^5}Y, \quad Z' = \frac{1}{l^5}Z.$$

Das sind die Gleichungen (11) des §1. Das Prinzip der kleinsten Wirkung führt uns zu dem selben Resultat der Analyse von §1.

Wenn wir uns auf die Formeln (1) beziehen, sehen wir, dass - bis auf einen konstanten Faktor - $\sum f^2 - \sum\alpha^2$ nicht durch die Lorentz-Transformation nicht geändert wird; es ist nicht so beim Ausdruck $\sum f^2 - +\sum\alpha^2$, welcher die Energie darstellt. Wenn wir uns auf den Fall beschränken, wo ε klein genug ist um das Quadrat zu vernachlässigen, und zwar auf eine Weise dass $k=1$, und wenn überdies $l=1$ vorausgesetzt wird, dann erhalten wir:

$$\sum f'^2 = \sum f^2 + 2\varepsilon(g\gamma - h\beta),$$
$$\sum\alpha'^2 = \sum\alpha^2 + 2\varepsilon(g\gamma - h\beta),$$

oder durch Addition,

$$\sum f'^2 + \sum\alpha'^2 = \sum f^2 + \sum\alpha^2 + 4\varepsilon(g\gamma - h\beta).$$

§ 4. Die Lorentz-Gruppe

Es ist wichtig zu bemerken, dass die Lorentz-Transformationen eine Gruppe bilden. Tatsächlich, wenn wir setzen:

$$x' = kl(x+\varepsilon t), \quad y' = ly, \quad z' = lz, \quad t' = kl(t+\varepsilon x),$$

und andererseits:

$$x'' = k'l'(x'+\varepsilon' t'), \quad y'' = l'y', \quad z'' = l'z', \quad t'' = k'l'(t'+\varepsilon' x'),$$

mit

$$k^{-2} = 1-\varepsilon^2, \quad k'^{-2} = 1-\varepsilon'^2,$$

es ergibt sich:

$$x'' = k''l''(x+\varepsilon'' t), \quad y'' = l''y, \quad z'' = l''z, \quad t'' = k''l''(t+\varepsilon'' x),$$

mit

$$\varepsilon'' = \frac{\varepsilon+\varepsilon'}{1+\varepsilon\varepsilon'}, \quad l'' = ll', \quad k'' = kk'(1+\varepsilon\varepsilon') = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon''^2}}.$$

Wenn wir l den Wert 1 geben, und ε unendlich klein annehmen,

$$x' = x+\delta x, \quad y' = y+\delta y, \quad z' = z+\delta z, \quad t' = t+\delta t,$$

es ergibt sich:

$$\delta x = \varepsilon t, \quad \delta y = \delta z = 0, \quad \delta t = \varepsilon x.$$

Das ist eine infinitesimale Transformation, ein Erzeuger der Gruppe, welche ich die Transformation T_1 nennen werde, und die aufgrund der Lie-Notation geschrieben werden kann:

$$t\frac{d\varphi}{dx} + x\frac{d\varphi}{dt} = T_1.$$

Wenn wir annehmen, dass $\varepsilon = 0$ und $l = 1+\delta l$, finden wir im Gegensatz dazu

$$\delta x = x\delta l, \quad \delta y = y\delta l, \quad \delta z = z\delta l, \quad \delta t = t\delta l$$

und wir haben eine andere infinitesimale Transformation T_0 der Gruppe (angenommen dass l und ε als unabhängige Variablen betrachtet werden), und es ergibt sich mit der Lie-Notation:

$$T_0 = x\frac{d\varphi}{dx} + y\frac{d\varphi}{dy} + z\frac{d\varphi}{dz} + t\frac{d\varphi}{dt}.$$

Aber wir können der y oder z-Achse die besondere Rolle geben, welche wir der x-Achse gegeben haben; es würden sich dann zwei andere infinitesimale Transformationen ergeben:

$$T_2 = t\frac{d\varphi}{dy} + y\frac{d\varphi}{dt},$$

$$T_3 = t\frac{d\varphi}{dz} + z\frac{d\varphi}{dt},$$

welche auch nicht die Gleichungen von Lorentz verändern.

Man kann die von Lie dargestellten Kombinationen so formen, dass

$$[T_1, T_2] = x\frac{d\varphi}{dy} - y\frac{d\varphi}{dx};$$

aber es ist einfach zu sehen, dass diese Transformation einem Wechsel der Koordinatenachsen entspricht, wobei sich die Achsen um einen sehr kleinen Winkel um die z-Achse drehen. Wir dürfen daher nicht überrascht sein, wenn ein solcher Wechsel nicht die Form der Gleichungen von Lorentz verändert, natürlich unabhängig von der Wahl der Achsen.

Wir sind deshalb dazu gezwungen eine kontinuierliche Gruppe zu betrachten, welche wir die *Lorentz-Gruppe* nennen werden und welche als infinitesimale Transformationen gelten:

1° die Transformation T_0, welche mit allen andere austauschbar ist;

2° die drei Transformationen $T_1,\ T_2,\ T_3$;

3° die drei Rotationen $[T_1,\ T_2],\ [T_2,\ T_3],\ [T_3,\ T_1]$.

Die Transformation einer beliebigen Gruppe kann jederzeit aufgeteilt werden in eine Transformation von der Form:

$$x' = lx, \quad y' = ly, \quad z' = lz, \quad t' = lt$$

und eine lineare Transformation welche die quadratische Form unverändert lässt:

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2.$$

Wir können unsere Gruppe noch einmal auf eine andere Weise erzeugen. Jede Transformation der Gruppe kann betrachtet werden als eine Transformation von der Form:

$$(1) \qquad x' = kl(x + \varepsilon t), \quad y' = ly, \quad z' = lz, \quad t' = kl(t + \varepsilon x),$$

vorangegangen und gefolgt von einer passenden Rotation.

Aber für unseren Gegenstand müssen wir nur einen Teil der Transformationen der Gruppe betrachten; wir müssen annehmen, dass l eine Funktion von ε ist, und dass die Wahl der Funktion auf eine Weise erfolgt, wodurch dieser Teile der Gruppe, den ich P nenne, wieder eine Gruppe formt.

Lasst uns das System um 180° um die y-Achse drehen, dann sollten wir eine Transformation finden, welche weiterhin ein Teil von P ist. Aber dies führt zu einem Wechsel der Zeichens für $x,\ x',\ z$, und z'. Wir finden also:

$$(2) \qquad x' = kl(x - \varepsilon t), \quad y' = ly, \quad z' = lz, \quad t' = kl(t - \varepsilon x).$$

Folglich ändert sich l nicht bei einer Änderung von ε nach $-\varepsilon$.

Andererseits, wenn P eine Gruppe ist, wird die inverse Substitution von (1) geschrieben:

$$(3) \qquad x' = \frac{k}{l}(x - \varepsilon t), \quad y' = \frac{y}{l}, \quad z' = \frac{z}{l}, \quad t' = \frac{k}{l}(t - \varepsilon x),$$

was gleichermaßen zu P gehören mus; es muss also identisch sein mit (2), das heißt

$$l = \frac{1}{l}.$$

Es muss folglich $l = 1$ sein.

§ 5. Die Langevin-Wellen

Hr. Langevin hat in einer besonders eleganten Form die Formeln dargestellt, welche das elektromagnetische Feld definieren, das durch die Bewegung eines einzelnen Elektrons entsteht.

Erinnern wir uns an die Gleichungen

$$(1) \qquad \Box\psi = -\rho, \quad \Box F = -\rho\xi.$$

Wir wissen dass wir das retardierte Potential integrieren können, und dass sich ergibt:

$$(2) \qquad \psi = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\rho_1 d\tau}{r}, \quad F = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\rho_1\xi_1 d\tau_1}{r}.$$

Aus diesen Formeln ergibt sich:

$$d\tau_1 = dx_1 dy_1 dz_1, \quad r^2 = (x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(y-y_1)^2,$$

wobei ρ_1 und ξ_1 sind die Werte von ρ und ξ, am Punkt $x_1,\ y_1,\ z_1$ und zum Zeitpunkt

$$t_1 = t - r.$$

Es seien: $x_0,\ y_0,\ z_0$ die Koordinaten eines Moleküls des Elektrons zum Zeitpunkt t;

$$x_1 = x_0 + U, \quad y_1 = y_0 + V, \quad z_1 = z_0 + W$$

sind seine Koordinaten zum Zeitpunkt t_1.

$U,\ V,\ W$ sind die Funktionen von $x_0,\ y_0,\ z_0$, sodass wir schreiben können:

$$dx_1 = dx_0 + \frac{dU}{dx_0}dx_0 + \frac{dU}{dy_0}dy + \frac{dU}{dz_0}dz + \xi_1 dt_1;$$

und wenn wir t als konstant annehmen, ebenso wie $x,\ y$, und z:

$$dt_1 = +\sum\frac{x-x_1}{r}dx_1.$$

Wir können folglich schreiben:

$$dx_1\left(1+\xi_1\frac{x_1-x}{r}\right)+dy_1\xi_1\frac{y_1-y}{r}+dz_1\xi_1\frac{z_1-z}{r} = dx_0\left(1+\frac{dU}{dx_0}\right)+dy_0\frac{dU}{dy_0}+dz_0\frac{dU}{dz_0}$$

damit die beiden anderen Gleichungen durch zirkuläre Vertauschung abgeleitet werden können.

Wir haben folglich:

$$(3)\ d\tau_1 \mid 1+\xi_1\frac{x_1-x}{r}, \quad \xi_1\frac{y_1-y}{r}, \quad \xi_1\frac{z_1-z}{r} \mid = d\tau_0 \mid 1+\frac{dU}{dx_0}, \quad \frac{dU}{dy_0}, \quad \frac{dU}{dz_0} \mid,$$

durch setzen von

$$d\tau_0 = dx_0 dy_0 dz_0.$$

Wir betrachten die Determinanten, welche in den beiden Teilen von (3) dargestellt werden, und zu Beginn im ersten Teil; wenn man sie zu entwickeln versucht sieht man, dass die Ausdrücke zweiten und dritten Grades in Bezug zu $\xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1$ verschwinden, und dass die Determinante gleich ist mit

$$1+\xi_1\frac{x_1-x}{r},\quad 1+\eta_1\frac{y_1-y}{r},\quad 1+\zeta_1\frac{z_1-z}{r}=1+\omega,$$

wobei ω die radiale Komponente der Geschwindigkeit $\xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1$ bezeichnet, das heißt die in Richtung des Radiusvektor zeigende Komponente, welche vom Punkt $x,\ y,\ z$, zum Punkt $x_1,\ y_1,\ z_1$ zeigt.

Um die zweite Determinante zu erhalten, betrachte ich die Koordinaten der verschiedenen Moleküle des Elektrons zum Zeitpunkt t', der der selbe ist für alle Moleküle, jedoch auf eine Weise dass sich für das betreffende Molekül $t_1 = t_1'$ ergibt. Die Koordinaten für das Molekül ergeben sich mit:

$$x_1' = x_0 + U',\quad y_1' = y_0 + V',\quad z_1' = z_0 + W',$$

$U',\ V',\ W'$ ergibt sich aus $U,\ V,\ W$, wenn man t_1 mit t_1' ersetzt; wie für t_1' ist es ebenso für alle Moleküle, es ergibt sich:

$$dx_1' = dx_0\left(1+\frac{dU'}{dx_0}\right)+dy_0\frac{dU'}{dy_0}+dz_0\frac{dU'}{dz_0}$$

und folglich

$$d\tau_1' = d\tau_0\mid 1+\frac{dU'}{dx_0},\quad \frac{dU'}{dy_0},\quad \frac{dU'}{dz_0}\mid,$$

durch setzen von

$$d\tau_1' = dx_1' dy_1' dz_1'.$$

Jedoch das Element der elektrischen Ladung ist

$$d\mu_1 = \rho_1 d\tau_1'$$

und zusätzlich ergibt sich *für das betrachtete Molekül* $t_1 = t_1'$, und folglich $\frac{dU'}{dx_0} = \frac{dU}{dx_0}$ etc.; wir können also schreiben:

$$d\mu_1 = \rho_1 d\tau_0'\mid 1+\frac{dU}{dx_0},\quad \frac{dU}{dy_0},\quad \frac{dU}{dz_0}\mid,$$

sodass Gleichung (3) ergibt:

$$\rho_1 d\tau_1(1+\omega) = d\mu_1$$

und die Gleichungen (2):

$$\psi = \frac{1}{4\pi}\int\frac{d\mu_1}{r(1+\omega)},\quad F=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\xi_1 d\mu_1}{r(1+\omega)}.$$

Wenn wir uns mit einem einzigen Elektron beschäftigen, reduzieren sich unserer Integrale auf ein einziges Element, vorausgesetzt dass wir nur die Punkte $x,\ y,\ z$ betrachten, welche ausreichend entfernt sind, sodass r und ω merklich den selben Wert für alle Punkte des Elektrons haben. Die Potentiale $\psi,\ F,\ G,\ H$ hängen von der Position des Elektrons ab, und außerdem von seiner Geschwindigkeit, weil $\xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1$ nicht nur im Zähler von $F,\ G,\ H$ aufscheinen, sondern die radiale Komponente ω scheint auch im Nenner auf. Es handelt sich selbstverständlich um seine Position und seine Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_1.

Die partiellen Ableitungen von $\psi,\ F,\ G,\ H$ in Bezug auf $t,\ x,\ y,\ z$ (und folglich die elektrischen und magnetischen Felder) hängen auch von seiner Beschleunigung ab. Zusätzlich sind sie *linear* abhängig, da die Ableitungen jener Beschleunigung durch eine einzige Differentiation eingeführt wurden.

Langevin wurde dazu geführt, unter den elektrischen und magnetischen Feldern die Ausdrücke abzugrenzen, welche nicht von der Beschleunigung abhängen (die er die Geschwindigkeitswelle nennt) und denen welche proportional zur Beschleunigung sind (welcher er Beschleunigungswelle nennt).

Die Berechnung der beiden Wellen mit der Lorentz-Transformation ist einfach. Wir können die Transformation tatsächlich auf das System anwenden, sodass die Geschwindigkeit des einen betrachteten Elektrons Null ergibt. Wir benutzen für die x-Achse die Richtung der Geschwindigkeit vor der Transformation, sodass zum Zeitpunkt t_1,

$$\eta_1 = \zeta_1 = 0,$$

und wir setzen $\varepsilon = -\xi$, sodass

$$\xi_1' = \eta_1' = \zeta_1' = 0.$$

Wir können also die Berechnung der beiden Wellen auf den Fall reduzieren, wo die Geschwindigkeit des Elektrons Null ist. Wir beginnen mit der Geschwindigkeitswelle; wir können zuerst bemerken, dass diese Welle so ist, als ob die Bewegung des Elektrons gleichförmig wäre.

Wenn die Geschwindigkeit des Elektrons Null ist, ergibt sich:

$$\omega = 0, \quad F = G = H = 0, \quad \psi = \frac{\mu_1}{4\pi r},$$

wobei μ_1 ist die elektrische Ladung des Elektrons. Die Geschwindigkeit reduziert sich auf Null durch die Lorentz-Transformation, wir haben also:

$$F' = G' = H' = 0, \quad \psi' = \frac{\mu_1}{4\pi r'},$$

wobei r' die Distanz von Punkt $x',\ y',\ z'$ zum Punkt $x_1',\ y_1',\ z_1'$ ist, und folglich

$$\alpha' = \beta' = \gamma' = 0,$$

$$f' = \frac{\mu_1\,(x' - x_1')}{4\pi r'^3} \quad g' = \frac{\mu_1\,(y' - y_1')}{4\pi r'^3}, \quad h' = \frac{\mu_1\,(z' - z_1')}{4\pi r'^3}.$$

Lasst uns nun die Lorentz-Transformation umkehren, um das wahre Feld zu finden, welches der Geschwindigkeit $\varepsilon,\ 0,\ 0$ entspricht. Durch Bezugnahme auf die Gleichungen (9), und (3) von §1, finden wir:

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0, \quad \beta = \varepsilon h, \quad \gamma = -\varepsilon g, \\ \\ f = \dfrac{\mu_1 k l^3}{4\pi r'^3}\,(x + \varepsilon t - x_1 - \varepsilon t_1), \quad g = \dfrac{\mu_1 k l^3}{4\pi r'^3}\,(y - y_1), \quad h = \dfrac{\mu_1 k l^3}{4\pi r'^3}\,(z - z_1). \end{array} \right.$$

Man sieht dass das magnetische Feld senkrecht zur x-Achse (Richtung der Geschwindigkeit) und zum elektrischen Feld ist, und dass das elektrische Feld gerichtet ist in Richtung des Punktes:

$$(5) \qquad x_1 + \varepsilon(t_1 - t), \quad y_1, \quad z_1.$$

Wenn das Elektron fortfährt sich geradlinig und gleichförmig zu bewegen - mit der Geschwindigkeit, welches es zum Zeitpunkt t_1 hatte, das heißt mit der Geschwindigkeit $-\varepsilon,\ 0,\ 0$ - dann hat es sich zum Zeitpunkt t am Punkt (5) befunden.

Wir gehen über zur Beschleunigungswelle; wir können dank der Lorentz-Transformation die Determination auf den Fall reduzieren, wo die Geschwindigkeit Null ist. Dieser Fall tritt ein wenn man sich eine Elektron vorstellt, das sehr kleine und sehr rasche Oszillationen der Amplitude ausführt, sodass die Verschiebungen und die Geschwindigkeiten unendlich klein sind, aber die Beschleunigungen beendet sind. Man kommt also zurück auf das Feld, welches in der berühmten Arbeit von Hertz mit dem Titel *Die Kräfte elektrischer Schwingungen nach der Maxwell'schen Theorie* untersucht wurde, und das für einen weit entfernten Punkt. Also sind die Bedingungen:

1° Die beiden elektrischen und magnetischen Ladungen sind untereinander gleich.

2° Sie sind senkrecht zueinander.

3° Sie sind senkrecht zur Normalen der Wellensphäre, das heißt der Sphäre, deren Zentrum der Punkt $x_1,\ y_1,\ z_1$ ist.

Ich sage, dass diese drei Eigenschaften weiter bestehen werden, selbst wenn die Geschwindigkeit nicht Null ist, und deswegen reicht es mir zu zeigen, dass sie nicht durch die Lorentz-Transformation geändert werden.

Da A tatsächlich die gewöhnliche Intensität der beiden Ladungen, so ist

$$(x - x_1) = r\lambda, \quad (y - y_1) = r\mu, \quad (z - z_1) = r\nu, \quad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1.$$

Ihre Eigenschaften drücken sich durch die Gleichungen aus:

$$\begin{cases} A^2 = \sum f^2 = \sum \alpha^2, \quad \sum f\alpha = 0, \quad \sum f(x - x_1) = 0, \quad \sum \alpha(x - x_1) = 0 \\ \sum f\lambda = 0, \quad \sum \alpha\lambda = 0; \end{cases}$$

was noch bedeutet, dass

$$\begin{matrix} \frac{b}{A}, & \frac{g}{A}, & \frac{h}{A} \\ \frac{\alpha}{A}, & \frac{\beta}{A}, & \frac{\gamma}{A} \\ \lambda, & \mu, & \nu \end{matrix}$$

das ist der Richtungskosinus der drei rechtwinkligen Richtungen, und man leitet die Beziehungen ab:

$$f = \beta\nu - \gamma\mu, \quad \alpha = h\mu - g\nu,$$

oder

$$(6) \qquad fr = \beta(z - z_1) - \gamma(z - z_1) \quad \alpha r = h(y - y_1) - g(z - z_1),$$

mit den Gleichungen, welche entsprechend abgeleitet werden können.

Wenn wir uns an die Gleichungen (3) von §1 erinnern, erhalten wir:

$$(7)\qquad \begin{cases} x'-x'_1 = kl\left[(x-x_1)+\varepsilon\,(t-t_1)\right] = kl\left[(x-x_1)+\varepsilon r\right], \\ y'-y'_1 = l\,(y-y_1)\,, \\ z'-z'_1 = l\,(z-z_1)\,. \end{cases}$$

Weiter oben im §3 finden wir:

$$l^4\left(\sum f'^2-\sum \alpha'^2\right) = \sum f^2-\sum \alpha^2.$$

Also $\sum f^2 = \sum \alpha^2$ führt zu $\sum f'^2-\sum \alpha'^2$.

Andererseits findet man durch Teilung der Gleichungen (9) von §1:

$$l^4 \sum f'\alpha' = \sum f\alpha,$$

was zeigt, dass $\sum f\alpha = 0$ zu $\sum f'\alpha' = 0$ führt.

Ich setze nun, dass

$$(8)\qquad \sum f'\,(x'-x'_1) = 0 \quad \sum \alpha'\,(x'-x'_1) = 0.$$

Tatsächlich, durch Gebrauch der Gleichungen (7) (sowie der Gleichungen 9 von §1) können die ersten Teile der beiden Gleichungen (8) jeweils geschrieben werden:

$$\frac{k}{l}\sum f\,(x-x_1)+\frac{k\varepsilon}{l}\left[fr+\gamma(y-y_1)-\beta\,(z-z_1)\right],$$

$$\frac{k}{l}\sum \alpha\,(x-x_1)+\frac{k\varepsilon}{l}\left[\alpha r+h\,(y-y_1)-g\,(z-z_1)\right].$$

Sie werden durch Gebrauch der Gleichungen $\sum f\,(x-x_1) = \sum \alpha\,(x-x_1) = 0$ und der Gleichungen (6) aufgehoben. Aber das ist genau das, was zu beweisen war.

Man kann zu den selben Ergebnissen auch durch einfache Überlegungen zur Homogenität kommen.

Tatsächlich, $\psi,\ F,\ G,\ H$ sind die Funktionen von $x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1,\ \xi_1 = \frac{dx_1}{dt_1},\ \eta_1 = \frac{dy_1}{dt_1},\ \zeta_1 = \frac{dz_1}{dt_1}$, welche homogen vom Grad -1 sind in Bezug zu $x,\ y,\ z,\ t,\ x_1,\ y_1,\ z_1,\ t_1$ und ihrer Differentiale.

Folglich sind die Ableitungen von $\psi,\ F,\ G,\ H$ in Bezug zu $x,\ y,\ z,\ t$ (und folglich auch die beiden Felder $f,\ g,\ h;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma$) homogen vom Grad -1 sind in Bezug zu den selben Größen, wenn wir uns weiters erinnern, dass die Beziehung

$$t-t_1 = r = \sqrt{\sum (x-x_1)^2}$$

homogen ist in Bezug zu diesen Größen.

Aber diese Ableitungen oder diese Felder hängen ab von $x-x_1$, den Geschwindigkeiten $\frac{dx_1}{dt_1}$, und den Beschleunigungen $\frac{d^2x_1}{dt_1^2}$; sie bestehen aus einem von den Beschleunigungen unabhängigen Ausdruck (Geschwindigkeitswelle)

und einem in Bezug zur Beschleunigung linearen Ausdruck (Beschleunigungswelle). Jedoch $\frac{dx_1}{dt_1}$ ist homogen vom Grad 0 und $\frac{d^2x_1}{dt_1^2}$ ist homogen vom Grad -1; sodass sich ergibt, dass die Geschwindigkeitswelle homogen vom Grad -2 in Bezug zu $x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1$ ist, und die Beschleunigungswelle zu homogen vom Grad -1 ist. Deshalb ist bei einem sehr weit entfernten Punkt die Beschleunigungswelle vorherrschend und kann folglich als mit der gesamten Welle vereinigt angesehen werden. Zusätzlich zeigt uns das Gesetz der Homogenität, dass die Beschleunigungswelle sich selbst gleich ist an einem entfernten Punkt und einem beliebigen Punkt. An einem beliebigen Punkte ähnelt sie also der gesamten Welle eines entfernten Punktes. Aber bei einem entfernten Punkt kann sich die Störung nur als ebene Welle ausbreiten, sodass die beiden Felder gleich sein müssen, und zwar senkrecht zueinander und senkrecht zur Ausbreitungsrichtung.

Ich werden mich darauf beschränken, für weitere Details auf eine Arbeit von Hrn. Langevin im *Journal de Physique* (Jahr 1905) zu verweisen.

§ 6. Kontraktion der Elektronen

Angenommen ein einzelnes Elektron führt eine geradlinige und gleichförmige Translationsbewegung aus. Nach dem was wir bisher gesehen haben, kann man - dank der Lorentz-Transformation - die Betrachtungen über das vom Elektron determinierte Feld auf den Fall des ruhenden Elektrons reduzieren; die Lorentz-Transformation ersetzt also das bewegte wirkliche Elektron mit einem unbeweglichen idealen Elektron.

Es sei $\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ f,\ g,\ h$ das reale Feld; es sei $\alpha',\ \beta',\ \gamma';\ f',\ g',\ h'$ das Feld nach der Lorentz-Transformation, sodass das ideale Feld $\alpha,'\ f'$ dem Fall eins unbewegten Elektrons entspricht; es ergibt sich:

$$\alpha' = \beta' = \gamma' = 0, \quad f' = -\frac{d\psi'}{dx'}, \quad f' = -\frac{d\psi'}{dy'}, \quad h' = -\frac{d\psi'}{dz'};$$

und für das reale Feld (durch Gebrauch der Formeln 9 des §1):

$$(1) \qquad \begin{cases} \alpha = 0, \quad \beta = \varepsilon h, \quad \gamma = -\varepsilon g \\ f = l^2 f', \quad g = kl^2 g', h = kl^2 h'. \end{cases}$$

Es ist nun die gesamte Energie aufgrund der Bewegung des Elektrons zu bestimmen, die entsprechende Wirkung und der elektromagnetische Impuls, um die elektromagnetische Masse des Elektrons bestimmen zu können. Für einen entfernten Punkt ist es ausreichend, das Elektron als auf einen einzigen Punkt reduziert zu betrachten; es ist also reduziert auf die Formeln (4) des vorhergehenden §, welche im Allgemeinen passend sind. Aber hier sind sie nicht ausreichend, weil die Energie grundsätzlich in den Ätherabschnitten in der Nähe des Elektrons lokalisiert ist.

Es können darüber verschiedene Hypothese aufgestellt werden.

Gemäß der von Abraham sind die Elektronen kugelförmig und unverformbar.

Also, wenn wir die Lorentz-Transformation bei einem realen kugelförmigen Elektron anwenden, würde das ideale Elektron zu einem Ellipsoid werden. Die Gleichung dieses Ellipsoiden wäre gemäß §1:

$$k^2\left(x' - \varepsilon t' - \xi t' + \varepsilon \xi x'\right)^2 + \left(y' - \eta k t' + \eta k \varepsilon x'\right)^2$$
$$+ \left(z' - \zeta k t' + \zeta k \varepsilon x'\right)^2 = l^2 r^2.$$

Aber hier hat man:

$$\xi + \varepsilon = \eta = \zeta = 0, \quad 1 + \varepsilon\xi = 1 - \varepsilon^2 = \frac{1}{k^2},$$

sodass die Gleichung für den Ellipsoid ergibt:

$$\frac{x'^2}{k^2} + y'^2 + z'^2 = l^2 r^2.$$

Wenn r der Radius des realen Elektrons ist, dann sind die Achsen des idealen Elektrons also:

$$klr, \quad lr, \quad lr.$$

Im Gegensatz dazu sind bei der Hypothese von Lorentz die bewegten Elektronen deformiert, sodass aus dem realen Elektron ein Ellipsoid wird, während das unbewegte ideale Elektron immer eine Kugel mit dem Radius r ist; die Achsen des realen Elektrons sind dann:

$$\frac{r}{lk}, \quad \frac{r}{l}, \quad \frac{r}{l}.$$

Wir bezeichnen mit

$$A = \frac{1}{2}\int f^2 d\tau$$

die *longitudinale elektrische Energie*; mit

$$B = \frac{1}{2}\int \left(g^2 + h^2\right) d\tau$$

die *transversale elektrische Energie*; mit

$$C = \frac{1}{2}\int \left(\beta^2 + \gamma^2\right) d\tau$$

die *transversale magnetische Energie*. Es gibt keine longitudinale magnetische Energie, weil $\alpha = \alpha' = 0$. Wir bezeichnen mit A', B', C' die entsprechenden Größen im idealen System. Man findet zuerst:

$$C' = 0, \quad C = \varepsilon^2 B.$$

Andererseits können wir beobachten, dass das reale Feld ausschließlich von $x + \varepsilon t$, y, und z abhängt, und schreiben:

$$d\tau = d\left(x + \varepsilon t\right) dy\, dz,$$

$$d\tau' = dx' dy' dz' = kl^3 d\tau;$$

wodurch:

$$A' = kl^{-1}A, \quad B' = k^{-1}l^{-1}B, \quad A = \frac{lA'}{k}, \quad B = klB'.$$

Bei der Hypothese von Lorentz hat man $B' = 2A'$, und A' - umgekehrt proportional zum Radius des Elektrons - ist eine von der Geschwindigkeit des realen Elektrons unabhängige Konstante; man findet also für die gesamte Energie:

$$A+B+C=A'lk\left(3+\varepsilon^2\right)$$

und für die Wirkung (per Zeiteinheit):

$$A+B-C=\frac{3A'l}{k}.$$

Wir berechnen nun den elektromagnetischen Impuls; wir finden:

$$D=\int(g\gamma-h\beta)\,d\tau=-\varepsilon\int\left(g^2+h^2\right)d\tau=-2\varepsilon B=-4\varepsilon klA'.$$

Aber es müssen sich bestimmte Beziehungen ergeben zwischen der Energie $E=A+B+C$, der Wirkung per Zeiteinheit $H=A+B-C$, und für den Impuls D. Die erste dieser Beziehungen ist:

$$E=H-\varepsilon\frac{dH}{d\varepsilon},$$

die zweite ist

$$\frac{dD}{d\varepsilon}=-\frac{1}{\varepsilon}\frac{dE}{d\varepsilon};$$

wodurch

$$(2)\qquad D=\frac{dH}{d\varepsilon},\quad E=H-\varepsilon D.$$

Die zweite der Gleichungen (2) ist immer erfüllt; abe die erste nicht, weil wenn

$$l=\left(1-\varepsilon^2\right)^{\frac{1}{6}}=k^{-\frac{1}{3}},$$

das heißt wenn das Volumen des idealen Elektrons gleich dem des realen Elektrons ist, oder wenn überdies das Volumen des Elektrons konstant ist; das ist die Hypothese von Langevin.

Das ist im Widerspruch mit den Ergebnis von §4, und mit dem von Lorentz auf eine andere Weise erhaltenen Ergebnis. Dieser Widerspruch muss erklärt werden.

Bevor ich mit der Erklärung beginne, bemerke ich - was die angenommen Hypothese auch sei - dass wir erhalten

$$H=A+B-C=\frac{l}{k}(A'+B'),$$

oder, in Folge von $C'=0$,

$$(3)\qquad H=\frac{l}{k}H'.$$

Wir können das Resultat der Gleichung $J=J'$ des §3 reproduzieren.

Wir haben tatsächlich:

$$J=\int H\,dt,\quad J'=\int H'\,dt'.$$

Wir bemerken, dass der Zustand des Systems nur von $x+\varepsilon t$, y, und z abhängt, das heißt von x', y', z', und wir haben:

$$t' = \frac{l}{k}t + \varepsilon x',$$

$$(4) \qquad dt' = \frac{l}{k}dt.$$

Durch Reproduktion der Gleichungen (3) und (4) findet man $J = J'$.

Versetzen wir uns in eine beliebige Hypothese, welche die von Lorentz, die von Abraham, die von Langevin, oder eine dazwischenliegende Hypothese, sein könnte.

Es seien

$$r, \quad \theta r, \quad \theta r$$

die drei Achsen eine realen Elektrons; die des idealen Elektrons sind:

$$klr, \quad \theta lr, \quad \theta lr.$$

$A' + B'$ ist dann die elektrostatische Energie eines Ellipsoiden mit den Achsen klr, θlr, θlr.

Wenn wir annehmen, dass sich die Elektrizität auf der Oberfläche des Elektrons wie bei einem Induktor verteilt, oder gleichmäßig auf der Innenseite des Elektrons verteilt; dann wird diese Energie die Form haben:

$$A' + B' = \frac{\varphi\left(\frac{\theta}{k}\right)}{klr},$$

wo φ eine bekannte Funktion ist.

Die Hypothese von Abraham besteht aus der Annahme:

$$r = const., \quad \theta = 1.$$

Jene von Lorentz:

$$l = 1, \quad kr = const., \quad \theta = k.$$

Jene von Langevin:

$$l = k^{-\frac{1}{3}}, \quad k = \theta, \quad klr = const.$$

Man findet folglich:

$$H = \frac{\varphi\left(\frac{\theta}{k}\right)}{k^2 r}.$$

Abraham findet, im Unterschied zu den vorherigen Notationen (Göttinger Nachrichten, 1902, p. 37):

$$H = \frac{a}{r}\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon}\log\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon},$$

wo a eine Konstante ist. Oder in der Hypothese von Abraham hat man $\theta = 1$; also:

$$(5) \qquad \varphi\left(\frac{1}{k}\right) = ak^2\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon}\log\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} = \frac{a}{\varepsilon}\log\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon},$$

was die Funktion φ definiert.

Die vorausgesetzt, stellen wir uns vor, dass das Elektron einer Bindung unterworfen ist, sodass sich eine Beziehung zwischen r und θ ergibt; in der Hypothese von Lorentz ist diese Beziehung $\theta r = konst.$, in jener von Langevin $\theta^2 r^3 = konst.$. Wir nehmen auf eine allgemeinere Weise an

$$r = b\theta^m,$$

wo b eine Konstante ist; sodass:

$$H = \frac{1}{bk^2}\theta^{-m}\varphi\left(\frac{\theta}{k}\right).$$

Welche Form wird das Elektron bei der Geschwindigkeit $-\varepsilon t$ annehmen, *wenn man annimmt, dass keine anderen Kräfte als jene der Bindung einwirken*? Diese Form wird durch die Gleichung definiert:

$$(6) \qquad \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0,$$

oder

$$-m\theta^{-m-1}\varphi + \theta^{-m}k^{-1}\varphi' = 0,$$

oder

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{mk}{\theta}.$$

Wenn wir wollen, dass ein Gleichgewicht in der Form $\theta = k$ vorliegt, dann muss $\frac{\theta}{k} = 1$ sein, und die logarithmische Ableitung von φ ist gleich m.

Wenn wir $\frac{1}{k}$ und den zweiten Teil von (5) den Potenzen von ε folgend entwickeln, dann ergibt Gleichung (5):

$$\varphi\left(1-\frac{\varepsilon^2}{2}\right) = a\left(1-\frac{\varepsilon^2}{3}\right),$$

unter Vernachlässigung der höheren Potenzen von ε.

Durch Differentiation ergibt sich:

$$-\varepsilon\varphi'\left(1-\frac{\varepsilon^2}{2}\right) = \frac{2}{3}\varepsilon a.$$

Für $\varepsilon = 0$, das heißt wenn das Argument von φ gleich 1 ist, werden die Gleichungen:

$$\text{(7)} \qquad \varphi = a, \quad \varphi' = -\frac{2}{3}a, \quad \frac{\varphi'}{\varphi} = -\frac{2}{3}.$$

In Übereinstimmung mit der Hypothese von Langevin, sollten wir daher $m = -\frac{2}{3}$ haben.

Das Resultat muss sich dem annähern, welches sich auf die erste Gleichung (2) bezieht, und sich in Wirklichkeit nicht unterscheiden. Tatsächlich, angenommen dass jedes Element $d\tau$ des Elektrons einer Kraft $Xd\tau$ parallel zur x-Achse unterworfen ist, wobei X für jedes der Elemente gleich ist; dann haben wir in Übereinstimmung mit der Definition des Impulses:

$$\frac{dD}{dt} = \int X d\tau.$$

Andererseits, das Prinzip der kleinsten Wirkung ergibt:

$$\delta J = \int X\delta U \; d\tau \; dt, \quad J = \int H \; dt, \quad \delta J = \int D\delta U \; dt,$$

wo δU die Verschiebung des Schwerpunkts des Elektrons ist; H hängt von θ und ε ab, wenn man zugibt, dass r mit θ durch die Bindungsgleichung verknüpft ist; man erhält also:

$$\delta J = \int \left(\frac{\partial H}{\partial \varepsilon} \delta\varepsilon + \frac{\partial H}{\partial \theta} \right) dt.$$

Andererseits ist $\delta\varepsilon = -\frac{d\delta U}{dt}$; sodass durch partielle Integration:

$$\int D\delta\varepsilon \; dt = \int D\delta U \; dt,$$

oder

$$\int \left(\frac{\partial H}{\partial \varepsilon} \delta\varepsilon + \frac{\partial H}{\partial \theta} \delta\theta \right) dt = \int D\delta\varepsilon \; dt;$$

sodass

$$D = \frac{\partial H}{\partial \varepsilon}, \quad \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0.$$

Aber die Ableitung $\frac{dH}{d\varepsilon}$, welche durch den zweiten Teil der ersten Gleichung (2) dargestellt wird, ist abgeleitet aus der Annahme, dass θ eine Funktion von ε ausdrückt, sodass

$$\frac{dH}{d\varepsilon} = \frac{\partial H}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{d\theta}{d\varepsilon}.$$

Gleichung (2) entspricht also Gleichung (6).

Der Schluss ist, dass wenn das Elektron einer Bindung einer seiner drei Achsen unterworfen ist, *und wenn keine anderen Kräfte außer den Bindungskräften einwirken*, dann kann die vom Elektron angenommene Form - wenn es mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit bewegt ist - nicht so sein, dass das entsprechende ideale Elektron kugelförmig ist, außer im Fall wo bei der Bindung das Volumen konstant bleibt, und zwar in Übereinstimmung mit der Hypothese von Langevin.

Wir fassen dies zusammen, damit wir das folgende Problem formulieren können: welche zusätzlichen Kräfte, außer den Bindungskräften, sind unbedingt einzuführen, um Rechnung abzulegen über das Gesetz von Lorentz - oder allgemeiner - jedem Gesetz außer dem von Langevin?

Die einfachste und die erste zu untersuchende Hypothese ist, dass jene zusätzlichen Kräfte aus einem speziellen Potential abgeleitet werden, welches von den drei Achsen des Ellipsoid abhängt, und folglich von θ und r; es sei $F(\theta,r)$ das Potential; in diesem Fall entspricht die Wirkung dem Ausdruck:

$$J = \int [H + F(\theta,r)]\, dt$$

und die Gleichgewichtsbedingungen werden geschrieben:

$$(8) \qquad \frac{dH}{d\theta} + \frac{dF}{d\theta} = 0, \quad \frac{dH}{dr} + \frac{dF}{dr} = 0.$$

Wen wir annehmen, dass r und θ durch $r = b\theta^m$ verbunden sind, dann können wir r als Funktion von θ betrachten, und F als nur von θ abhängend betrachten, und bewahren nur Gleichung (8) mit

$$H = \frac{\varphi}{bk^2\theta^m}, \quad \frac{dH}{d\theta} = \frac{-m\theta}{bk^2\theta^{m+1}} + \frac{\varphi'}{bk^3\theta^m}.$$

Es muss, für $k = \theta$, Gleichung (8) erfüllt sein; was unter Berücksichtigung der Gleichungen (7) ergibt:

$$\frac{dF}{d\theta} = \frac{ma}{b\theta^{m+3}} + \frac{2}{3}\frac{a}{b\theta^{m+3}},$$

sodass:

$$F = \frac{-a}{b\theta^{m+2}} \frac{m + \frac{2}{3}}{m+2}$$

und bei der Hypothese von Lorentz, wo $m = -1$:

$$F = \frac{a}{3b\theta}.$$

Angenommen, dass *keinerlei* Bindung existiert - wobei r und θ als zwei unabhängige Variable betrachtet werden - und wir behalten die beiden Gleichungen (8): es ergibt sich:

$$H = \frac{\varphi}{k^2 r}, \quad \frac{dH}{d\theta} = \frac{\varphi'}{k^3 r}, \quad \frac{dH}{dr} = \frac{-\varphi}{k^2 r^2},$$

Die Gleichungen (8) sollen erfüllt sein für $k = \theta$, $r = b\theta^m$; das ergibt:

$$(9)\qquad \frac{dF}{dr} = \frac{a}{b^2\theta^{2m+2}}, \quad \frac{dF}{d\theta} = \frac{2}{3}\frac{a}{b\theta^{m+3}}.$$

Eine der Arten diese Bedingungen zu erfüllen, ist zu setzen:

$$(10)\qquad F = Ar^{\alpha}\theta^{\beta},$$

wo A, α und β die Konstanten sind; die Gleichungen (9) sollen erfüllt sein für $k = \theta$, $r = b\theta^m$, es ergibt sich:

$$Aab^{\alpha-1}\theta^{m\alpha-m+\beta} = \frac{a}{b^2\theta^{2m+2}}, \quad A\beta b^{\alpha}\theta^{,\alpha+\beta-1} = \frac{2}{3}\frac{a}{b\theta^{m+3}}.$$

Durch Identifizierung findet man

$$(11)\qquad \alpha = 3\gamma, \quad \beta = 2\gamma, \quad \gamma = -\frac{m+2}{3m+2}, \quad A = \frac{a}{\alpha b^{\alpha+1}}.$$

Aber das Volumen des Ellipsoiden ist proportional zu r^3, θ^2, sodass das zusätzliche Potential proportional zur Potenz γ des Elektronenvolumens ist.

In der Theorie von Lorentz hat man $m = -1$, $\gamma = 1$.

Man gelangt so wieder zu der Hypothese von Lorentz, unter der Bedingung der Einführung eines zusätzlichen Potentials, welches proportional zum Volumen des Elektrons ist.

Der Hypothese von Langevin entspricht $\gamma = \infty$.

§ 7. Quasistationäre Bewegung

Es verbleibt zu sehen, ob diese Hypothese der Elektronenkontraktion die Unmöglichkeit der Erbringung eines Nachweises der absoluten Bewegung erklärt, und ich werde mit dem Studium der quasistationären Bewegung eines isolierten Elektrons beginnen, oder einem, das nur der Wirkung von anderen entfernten Elektronen unterworfen ist.

Wir wissen, dass die sogenannte quasistationäre Bewegung eine Bewegung ist, wo die Änderungen der Geschwindigkeit langsam genug sind, damit die magnetischen und elektrischen Energien aufgrund der Bewegung des Elektrons sich von denen bei gleichförmiger Bewegung kaum unterscheiden; wir wissen auch, dass Abraham infolge des Begriffs der quasistationären Bewegung zu den transversalen und longitudinalen elektromagnetischen Massen gelangt ist.

Ich denke das sollte präzisiert werden. Es sei H die Wirkung per Zeiteinheit:

$$H = \frac{1}{2}\int \left(\sum f^2 - \sum \alpha^2\right) d\tau,$$

wo wir für den Augenblick nur die elektrischen und magnetischen Felder aufgrund der Bewegung eines isolierten Elektrons betrachten. Im vorhergehenden § betrachteten wir die Bewegung als gleichförmig, und wir betrachteten H als abhängig von der Geschwindigkeit ξ, η, ζ des Schwerpunkts des Elektrons (die drei Komponenten im vorhergehenden §, haben die Werte $-\varepsilon$, 0, 0) und den Parametern r und θ, welche die Form des Elektrons definieren.

Aber wenn die Bewegung nicht mehr gleichförmig ist, dann hängt H nicht ausschließlich von den Werten von ξ, η, ζ, r, θ am betreffenden Zeitpunkt ab, sondern von den Werten der selben Größen zu anderen Zeitpunkten, welche um Größen der selben Ordnung abweichen können, wie die vom Lichte benötigte Zeit um von einem Punkt des Elektrons zu einem anderen zu gelangen; mit andern Worten, H hängt nicht nur von ξ, η, ζ, r, θ ab, sondern auch von ihren Ableitungen aller Ordnungen in Bezug zur Zeit.

Also gut, die Bewegung wird quasistationär sein, wenn die partiellen Ableitungen von H in Bezug zu den successiven Ableitungen von ξ, η, ζ, r, θ vernachlässigbar sind, und zwar gegenüber den partiellen Ableitungen von H in Bezug zu den Größen ξ, η, ζ, r, θ selbst.

Die Gleichungen einer solchen Bewegung können geschrieben werden:

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dH}{d\theta}+\dfrac{dF}{d\theta}=\dfrac{dH}{dr}+\dfrac{dF}{dr}=0, \\ \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{dH}{d\xi}=-\displaystyle\int X d\tau, \quad \dfrac{d}{dt}\dfrac{dH}{d\eta}=-\displaystyle\int Y d\tau, \quad \dfrac{d}{dt}\dfrac{dH}{d\zeta}=-\displaystyle\int Z d\tau. \end{cases}$$

In diesen Gleichungen hat F die selbe Bezeichnung wie in dem vorherigen §; X, Y, Z sind die Komponenten der Kraft, welche auf das Elektron wirkt: diese Kraft wird verursacht durch die elektrischen und magnetischen Felder, welche von den *anderen* Elektronen erzeugt werden.

Wir bemerken, dass H nicht von ξ, η, ζ abhängt, und zwar wegen den Einfluss der Kombination

$$V=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},$$

das heißt von der Größe der Geschwindigkeit; wenn weiters mit D der Impuls bezeichnet wird, ergibt sich:

$$\frac{dH}{d\xi}=\frac{dH}{dV}\frac{\xi}{V}=-D\frac{\xi}{V},$$

sodass:

$$(2) \qquad -\frac{d}{dt}\frac{dH}{d\xi}=\frac{D}{V}\frac{d\xi}{dt}-D\frac{\xi}{V^2}\frac{dV}{dt}+\frac{dD}{dV}\frac{\xi}{V}\frac{dV}{dt},$$

$$(2^{bis}) \qquad -\frac{d}{dt}\frac{dH}{d\eta}=\frac{D}{V}\frac{d\eta}{dt}-D\frac{\eta}{V^2}\frac{dV}{dt}+\frac{dD}{dV}\frac{\eta}{V}\frac{dV}{dt},$$

mit

$$(3) \qquad V\frac{DV}{dt}=\sum\xi\frac{d\xi}{dt}.$$

Wenn wir die aktuelle Richtung der Geschwindigkeit als x-Achse nehmen, ergibt sich:

$$\xi=V, \quad \eta=\zeta=0, \quad \frac{d\xi}{dt}=\frac{dV}{dt};$$

die Gleichungen (2) und (2bis) werden zu:

$$-\frac{d}{dt}\frac{dH}{d\xi}-\frac{dD}{dV}\frac{d\xi}{dt}, \quad -\frac{d}{dt}\frac{dH}{d\eta}=\frac{D}{V}\frac{d\eta}{dt}$$

und die drei letzten Gleichungen (1):

$$(4) \qquad \frac{dD}{dV}\frac{d\xi}{dt}=\int X d\tau, \quad \frac{D}{V}\frac{d\eta}{dt}=\int Y d\tau, \quad \frac{D}{V}\frac{d\zeta}{dt}=\int YZ d\tau.$$

Deshalb gab Abraham $\frac{dD}{dV}$ den Namen *longitudinale Masse* und $\frac{D}{V}$ den Namen *transversale Masse*; wir erinnern uns, dass $D=\frac{dH}{dV}$.

Bei der Hypothese von Lorentz hat man:

$$D = -\frac{dH}{dV} = -\frac{\partial H}{\partial V},$$

wo $\frac{\partial H}{\partial V}$ die Ableitung in Bezug zu V darstellt, nach welcher r und θ ersetzt werden durch die Werte der Funktionen von V, abgeleitet aus den beiden ersten Gleichungen (1); wir haben also nach dieser Substitution,

$$H = +A\sqrt{1-V^2}.$$

Wir wählen die Einheiten, sodass der konstante Faktor A gleich 1 ist, und ich setze $\sqrt{1-V^2} = h$, wodurch:

$$H = +h, \quad D = \frac{V}{h}, \quad \frac{dD}{dV} = h^{-3}, \quad \frac{dD}{dV}\frac{1}{V^2} - \frac{D}{V^3} = h^{-3}.$$

Wir setzen überdies:

$$M = V\frac{dV}{dt} = \sum \xi \frac{d\xi}{dt}, \quad X_1 = \int X d\tau$$

und wir finden für die Gleichung der quasistationären Bewegung:

$$(5) \qquad h^{-1}\frac{d\xi}{dt} + h^{-3}\xi M = X_1.$$

Lasst uns sehen, was mit den Gleichungen bei einer Lorentz-Transformation geschieht. Wir setzen $1 - \xi\varepsilon = \mu$, und wir haben zuerst:

$$\mu\xi' = \xi + \varepsilon, \quad \mu\eta' = \frac{\eta}{k}, \quad \mu\zeta' = \frac{\zeta}{k},$$

wodurch sich einfach ergibt

$$\mu h' = \frac{h}{k}.$$

Wir haben gleichermaßen

$$dt' = k\mu dt,$$

wodurch:

$$\frac{d\xi'}{dt'} = \frac{d\xi}{dt}\frac{1}{k^3\mu^3}, \quad \frac{d\eta'}{dt'} = \frac{d\eta}{dt}\frac{1}{k^2\mu^2} - \frac{d\xi}{dt}\frac{\eta\varepsilon}{k^2\mu^3}, \quad \frac{d\zeta'}{dt'} = \frac{d\zeta}{dt}\frac{1}{k^2\mu^2} - \frac{d\xi}{dt}\frac{\zeta\varepsilon}{k^2\mu^3},$$

wodurch überdies:

$$M' = \frac{d\xi}{dt}\frac{\varepsilon h^2}{k^3\mu^4} + \frac{M}{k^3\mu^3}$$

und

$$(6) \qquad h'^{-1}\frac{d\xi'}{dt'}+h'^{-3}\xi' M' = \left[h^{-1}\frac{d\xi}{dt}+h^{-3}(\xi+\varepsilon)M\right]\mu^{-1},$$

$$(7) \qquad h'^{-1}\frac{d\eta'}{dt'}+h'^{-3}\eta' M' = \left[h^{-1}\frac{d\eta}{dt}+h^{-3}\eta M\right]\mu^{-1}h^{-1}.$$

Kommen wir nun wieder auf die Gleichungen (11bis) des §1 zurück; man kann $X_1,\ Y_1,\ Z_1$ im selben Sinne wie in den Gleichungen (5) betrachten. Andererseits haben wir $l=1$ und $\frac{\rho'}{\rho}=k\mu$; diese Gleichungen werden also zu:

$$(8) \qquad \begin{cases} X_1' = \mu^{-1}\left(X_1+\varepsilon\sum X_1\xi\right), \\ Y_1' = k^{-1}\mu^{-1}Y_1. \end{cases}$$

Wir berechnen $\sum X_1\xi$ mit Hilfe der Gleichungen (5), wir finden:

$$\sum X_1\xi = H^{-3}M,$$

wodurch

$$(9) \qquad \begin{cases} X_1' = \mu^{-1}\left(X_1+\varepsilon h^{-3}M\right), \\ Y_1' = k^{-1}\mu^{-1}Y_1. \end{cases}$$

Durch Vergleich der Gleichungen (5), (6), (7) und (9), findet man schließlich:

$$(10) \qquad \begin{cases} h'^{-1}\dfrac{d\xi'}{dt'}+h'^{-3}\xi' M' = X_1', \\ h'^{-1}\dfrac{d\eta'}{dt'}+h'^{-3}\eta' M' = Y_1' \end{cases}$$

was zeigt, dass die Gleichungen für die quasistationäre Bewegung nicht durch die Lorentz-Transformation verändert werden; aber es beweist nicht, dass die Hypothese von Lorentz die einzige ist, welche zu diesem Ergebnis führt.

Um diesen Punkt zur begründen, werden wir uns - was auch von Lorentz getan wurde - auf bestimmte besondere Fälle beschränken, was für uns natürlich ausreicht um eine negative Aussage zu beweisen.

Wie können wir zuerst die Hypothesen erweitern, welche der vorhergehenden Rechnung zugrundeliegen?

1° Anstatt $l=1$ wie in der Lorentz-Transformation anzunehmen, nehmen wir beliebige l an.

2° Anstatt anzunehmen, dass F proportional zum Volumen ist, und folglich dass H proportional zu h ist, nehmen wir an, dass F eine beliebige Funktion von θ und von r ist, sodass [nach Ersetzung von θ und r durch die Werte der Funktionen von V, abgeleitet von den beiden ersten Gleichungen (1)] H eine beliebige Funktion von V ist.

Ich bemerke zuerst, wenn man $H=h$ annimmt, dass man $l=1$ haben muss; und tatsächlich bestehen die Gleichungen (6) und (7) weiter, außer dass die zweiten Teile mit $\frac{1}{l}$ multipliziert werden; die Gleichungen (9) ebenso, außer dass die zweiten Teile mit $\frac{1}{l^2}$ multipliziert werden; und schließlich die Gleichungen (10), außer dass die zweiten Teile mit $\frac{1}{l}$ multipliziert werden. Wenn man sieht, dass die Bewegungsgleichungen nicht durch die Lorentz-Transformation geändert werden, das heißt dass die Gleichungen (10) sich von den Gleichungen (5) nur durch die Akzentuierung der Buchstaben unterscheiden, muss sich ergeben:

$$l=1.$$

Wir nehmen nun an, dass $\eta = \zeta = 0$, wodurch $\xi = V$, $\frac{d\xi}{dt} = \frac{dV}{dt}$; die Gleichungen (5) nehmen die Form an:

$$(5^{bis}) \qquad -\frac{d}{dt}\frac{dH}{d\xi} = \frac{dD}{dV}\frac{d\xi}{dt} = X_1, \quad -\frac{d}{dt}\frac{dH}{d\eta} = \frac{D}{V}\frac{d\eta}{dt} = Y_1$$

Wir können auch setzen:

$$\frac{dD}{dV} = f(V) = f(\xi), \quad \frac{D}{V} = \varphi(V) = \varphi(\xi).$$

Wenn die Bewegungsgleichungen nicht durch die Lorentz-Transformation geändert werden, sollte man haben:

$$f(\xi)\frac{d\xi}{dt} = X_1,$$

$$\varphi(\xi)\frac{d\eta}{dt} = Y_1,$$

$$f(\xi')\frac{d\xi'}{dt'} = X_1' = l^{-2}\mu^{-1}(X_1 + \varepsilon \sum X_1 \xi) = l^{-2}\mu^{-1}X_1(1+\varepsilon\xi) = l^{-2}X_1,$$

$$\varphi(\xi')\frac{d\eta'}{dt'} = Y_1' = l^{-2}k^{-1}\mu^{-1}Y_1,$$

und folglich:

$$(11) \qquad \begin{cases} f(\xi)\dfrac{d\xi}{dt} = l^2 f(\xi')\dfrac{d\xi'}{dt'}, \\ \varphi(\xi)\dfrac{d\eta}{dt} = l^2 k\mu\,\varphi(\xi')\dfrac{d\eta'}{dt'}. \end{cases}$$

Aber wir haben:

$$\frac{d\xi'}{dt'} = \frac{d\xi}{dt}\frac{1}{k^3\mu^3}, \quad \frac{d\eta'}{dt'} = \frac{d\eta}{dt}\frac{1}{k^2\mu^2},$$

wodurch

$$f(\xi') = f\left(\frac{\xi+\varepsilon}{1+\xi\varepsilon}\right) = f(\xi)\frac{k^3\mu^3}{l^2},$$

$$\varphi(\xi') = \varphi\left(\frac{\xi+\varepsilon}{1+\xi\varepsilon}\right) = \varphi(\xi)\frac{k\mu}{l^2};$$

wobei, durch Elimination von l^2, wir die Funktionsgleichung finden:

$$k^2\mu^2\frac{\varphi\left(\dfrac{\xi+\varepsilon}{1+\xi\varepsilon}\right)}{\varphi(\xi)} = \frac{f\left(\dfrac{\xi+\varepsilon}{1+\xi\varepsilon}\right)}{f(\xi)},$$

oder durch Setzen von

$$\frac{\varphi(\xi)}{f(\xi)} = \Omega(\xi) = \frac{D}{V\frac{\nu D}{dV}},$$

das ist:

$$\Omega\left(\frac{\xi+\varepsilon}{1+\xi\varepsilon}\right) = \Omega(\xi)\frac{1+\varepsilon^2}{(1+\xi\varepsilon)^2},$$

die Gleichung welche erfüllt wird für alle Werte von ξ und von ε. Für $\zeta = 0$ findet man:

$$\Omega(\varepsilon) = \Omega(0)\left(1+\varepsilon^2\right),$$

wodurch

$$D = A\left(\frac{V}{\sqrt{1-V^2}}\right)^m,$$

wo A eine Konstante ist, und wo ich setze $\Omega(0) = \frac{1}{m}$.

Wir finden also:

$$\varphi(\xi) = \frac{A}{\xi}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)^m, \quad \varphi(\xi') = \frac{A\mu}{\xi+\varepsilon}\left(\frac{\xi+\varepsilon}{\sqrt{1-\xi^2}\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)^m.$$

Also $\varphi(\xi') = \varphi(\xi)\dfrac{k\mu}{l^2}$; folglich hat man:

$$(\xi+\varepsilon)^{m-1}\left(1-\varepsilon^2\right)^{-\frac{m}{2}} = -\xi^{m-1}\left(1-\varepsilon^2\right)^{-\frac{1}{2}} l^{-2}.$$

Da l nur von ε abhängt (weil, wenn mehrere Elektronen vorhanden sind, l den selben Wert für alle Elektronen haben soll, selbst wenn ihre Geschwindigkeiten ξ unterschiedlich sind), kann diese Identität nur existieren wenn:

$$m = 1, \quad l = 1.$$

Also ist die Hypothese von Lorentz die einzige, welche verträglich ist mit der Unmöglichkeit, einer Nachweis der absoluten Bewegung zu erbringen; wenn man diese Unmöglichkeit akzeptiert, muss anerkannt werden, dass die bewegten Elektronen auf eine Weise kontrahieren, dass sie zu Rotationsellipsoiden werden, wobei ihre beiden Achsen konstant bleiben; es muss auch die Existenz eines zusätzlichen Potentials, welches proportional zum Elektronenvolumen ist, anerkannt werden, wie im vorhergehenden § gezeigt wurde.

Die Analyse von Lorentz findet also eine klare Bestätigung, aber wir können besser Rechenschaft über den wahren Grund der Sache ablegen, die uns beschäftigt; diesen Grund müssen wir in den Betrachtungen von §4 suchen. *Die Transformationen, welche die Bewegungsgleichungen unverändert lassen, müssen eine Gruppe bilden, und das kann nur bei $l = 1$ sein*. Da wir nicht erkennen dürfen, ob ein Elektron ruht oder in Bewegung ist, muss es - wenn es in Bewegung ist - einer Verformung unterworfen sein, welche genauso ausfällt, wie es von der entsprechenden Transformation der Gruppe vorgegeben ist.

§ 8. Beliebige Bewegung

Die vorangegangenen Resultate sind nur auf die quasistationäre Bewegung anwendbar, aber es ist einfach, diese für den allgemeinen Fall zu erweitern; es reicht aus die Prinzipien von §3 anzuwenden, das heißt besonders das Prinzip der kleinsten Wirkung.

Der Ausdruck der Wirkung ist:

$$J = \int dt\ d\tau \left(\frac{\sum f^2}{2} - \frac{\sum \alpha^2}{2} \right),$$

er lädt dazu ein, einen Ausdruck hinzuzufügen, der das zusätzliche Potential F von §6 darstellt; der Ausdruck erhält natürlich die Form:

$$J_1 = \int \sum(F) dt,$$

wo $\sum(F)$ die Summe des zusätzlichen Potentials für verschiedene Elektronen darstellt, jedes von ihnen ist proportional zum Volumen es entsprechenden Elektrons.

Ich schreibe (F) zwischen Klammern, damit keine Verwechslung mit dem Vektor $F,\ G,\ H$ auftritt.

Die gesamte Wirkung ist dann $J + J_1$. Wir haben im §3 gesehen, dass J nicht durch die Lorentz-Transformation verändert wird; es muss nun gezeigt werden, dass dies bei J_1 ebenso ist.

Wir haben für eines der Elektronen,

$$(F) = \omega_0 \tau,$$

wo ω_0 eine spezieller Koeffizient des Elektrons ist, und τ sein Volumen ist; ich schreibe also:

$$\sum(F) = \int \omega_0 d\tau,$$

der Integral wird über den gesamten Raum erweitert, jedoch so, damit der Koeffizient ω_0 Null ist außerhalb des Elektrons, und im Innern des einzelnen Elektrons gleich ist mit dem speziellen Koeffizienten des Elektrons. Wir haben also:

$$J_1 = \int \omega_0 d\tau\ dt$$

und nach der Lorentz-Transformation:

$$J_1' = \int \omega_0' d\tau'\ dt'.$$

Also haben wir $\omega_0 = \omega_0'$; denn wenn ein Punkt zu einem Elektron gehört, so gehört der entsprechende Punkt nach der Lorentz-Transformation *zum selben* Elektron. Andererseits finden wir im §3:

$$d\tau'\ dt' = l^4 d\tau\ dt$$

und da wir jetzt annehmen $l = 1$,

$$d\tau'\ dt' = d\tau\ dt.$$

Wir haben also

$$J_1 = J_1'. \text{ C. Q. F. D.}$$

Das Theorem ist nun allgemein, es gibt uns gleichzeitig eine Lösung für die Frage, welche wir uns am Schluss von §1 gestellt haben: das Finden von zusätzlichen Kräften, welche nicht durch die Lorentz-Transformation verändert werden. Das zusätzliche Potential (F) erfüllt diese Bedingung.

Wir können also das am Schluss von §1 vorgestellte Resultat verallgemeinern und schreiben:

Wenn die Trägheit der Elektronen ausschließlich elektromagnetischen Ursprung ist, und wenn sie nur den Kräften elektromagnetischen Ursprungs unterworfen sind, oder den vom zusätzlichen Potential (F) verursachten Kräften, dann kann kein Experiment den Nachweis einer absoluten Bewegung erbringen.

Welche Kräfte werden also vom Potential (F) verursacht? Diese können offenbar einem im Innern des Elektrons herrschenden Druck gleichgesetzt werden; es ist als ob jedes Elektron ein hohler Raum wäre, der einem konstanten internen Druck (unabhängig vom Volumen) unterworfen ist; die Arbeit eines solchen Drucks würde natürlich proportional zu den Veränderungen des Volumens sein.

Ich muss jedenfalls anmerken, dass der Druck negativ ist. Erinnern wir uns an Gleichung (10) des §6, welche aufgrund der Hypothese von Lorentz geschrieben wird:

$$F = Ar^3\theta^2;$$

die Gleichungen (11) des §6 geben uns:

$$A = \frac{a}{3b^4}.$$

Unser Druck ist gleich mit A, bis auf einen konstanten Koeffizienten, welcher außerdem negativ ist.

Wir bestimmen nun die Masse des Elektrons, wobei ich von der "Experimentalmasse" des Elektrons spreche, das heißt von der Masse bei geringen Geschwindigkeiten; wir haben (s. §6):

$$H = \frac{\varphi\left(\frac{\theta}{k}\right)}{k^2 r}, \quad \theta = k, \quad \varphi = a, \quad \theta r = b;$$

wodurch

$$H = \frac{a}{bk} = \frac{a}{b}\sqrt{1-V^2}.$$

Für sehr geringe V schreibe ich:

$$H = \tfrac{a}{b}\left(1 - \tfrac{V^2}{2}\right),$$

sodass die Masse, sowohl longitudinal als auch transversal, $\frac{a}{b}$ ergibt.

Aber a ist eine numerische Konstante, welche anzeigt: *der Druck, welcher von unserem zusätzlichen Potential verursacht wird, ist proportional zur vierten Potenz der Experimentalmasse des Elektrons.*

Da die newtonsche Anziehung proportional zur Experimentalmasse ist, ist es naheliegend zur folgern, dass es einen Zusammenhang zwischen der Ursache der Gravitation und der Ursache des zusätzlichen Potentials gibt.

§ 9. Hypothesen über die Gravitation

Die Theorie von Lorentz erklärt also die vollständige Unmöglichkeit, einen Nachweis der absoluten Bewegung der Erde zu erbringen, wenn alle Kräfte einen elektromagnetischen Ursprung haben.

Jedoch existieren andere Kräfte, welche keine elektromagnetische Herkunft zugeschrieben werden kann, wie beispielsweise die Gravitation. Es kann sich tatsächlich ergeben, dass zwei Systeme von Körpern äquivalente elektromagnetische Felder produzieren, das heißt sie üben die selbe Wirkung auf die elektrischen Körper und auf die Ströme aus, während diese beiden Systeme nicht die selbe Gravitationswirkung auf die newtonschen Massen ausüben. Das Gravitationsfeld ist deshalb von dem elektromagnetischen Feld verschieden. Lorentz wurde deshalb dazu geführt seine Hypothese zu vervollständigen, indem er annahm dass *Kräfte jeglicher Herkunft, und besonders die Gravitation, durch die Translation* (oder wem es besser gefällt, durch die Lorentz-Transformation) *auf die selbe Weise beeinflusst werden wie die elektromagnetischen Kräfte*.

Es ist jetzt angemessen auf die Details einzugehen und diese Hypothese noch näher zu untersuchen. Wenn wir wollen, dass die newtonsche Kraft auf eine bestimmte Weise durch die Lorentz-Transformation bestimmt wird, können wir nicht mehr annehmen, dass diese Kraft nur von der relativen Position des anziehenden Körpers und des angezogenen Körpers zum betreffenden Zeitpunkt abhängt. Sie sollte auch von den Geschwindigkeiten der beiden Körper abhängen. Und das ist nicht alles: es ist natürlich anzunehmen, dass die Kraft, welche zum Zeitpunkt t auf den angezogenen Körper wirkt, von der Position und der Geschwindigkeit des Körpers zum selben Zeitpunkt t abhängt; aber sie wird darüber hinaus auch von der Position und der Geschwindigkeit des anziehenden Körpers abhängen, und zwar nicht beim Zeitpunkt t, sondern einen Augenblick früher, als ob die Gravitation eine bestimmte Ausbreitungszeit benötigt hätte.

Betrachten wir nun die Position des angezogenen Körpers zum Zeutpunkt t_0; seine Koordinaten zu diesem Zeitpunkt sind $x_0,\ y_0,\ z_0$, und seine Geschwindigkeitskomponenten sind $\xi,\ \eta,\ \zeta$; wir betrachten andererseits den anziehenden Körpers zum entsprechenden Zeitpunkt t_0+t; seine Koordinaten zu diesem Zeitpunkt sind $x_0+x,\ y_0+y,\ z_0+z$, und $\xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1$ sind seine Geschwindigkeitskomponenten.

Wir sollten zuerst diese Beziehung erhalten:

$$(1) \qquad \varphi(t,\ x,\ y,\ z,\ \xi,\ \eta,\ \zeta,\ \xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1)=0$$

um die Zeit t zu definieren. Diese Beziehung definiert das Ausbreitungsgesetz der Gravitationswirkung (ich verpflichte mich keineswegs zu der Bedingung, dass die Ausbreitung in alle Richtungen mit der selben Geschwindigkeit erfolgt).

Nun seien $X_1,\ Y_1,\ Z_1$ die 3 Komponenten der zum Zeitpunkt t_0 auf den angezogenen Körper ausgeübten Wirkung; wir wollen $X_1,\ Y_1,\ Z_1$ ausdrücken als Funktionen von

$$(2) \qquad t,\ x,\ y,\ z,\ \xi,\ \eta,\ \zeta,\ \xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1\ .$$

Welche Bedingungen müssen erfüllt sein?

1. Die Bedingung (1) soll nicht durch die Tranformationen der Lorentz-Gruppe geändert werden.

2. Die Komponenten $X_1,\ Y_1,\ Z_1$ sollen durch die Lorentz-Transformation auf die selbe Weise beeinflusst werden, wie die durch die selben Symbole bezeichneten elektromagnetischen Kräfte, das heißt in Übereinstimmung mit den Gleichungen (11 bis) des §1.

3. Wenn die beiden Körper in Ruhe sind, sollen die gewöhnlichen Gesetze der Anziehung wiederhergestellt werden.
   Es ist wichtig zu bemerken, dass im vorherigen Fall die Beziehung (1) verschwindet, da die Zeit t keine Rolle mehr spielt wenn die beiden Körper in Ruhe sind.
   Das auf diese Weise dargestellte Problem ist selbstverständlich unbestimmt. Wir werden deshalb nach anderen zusätzlichen Bedingungen suchen, welche möglichst zufriedenstellend sind.

4. Die astronomischen Beobachtungen scheinen keine merkliche Abweichung vom Gesetz von Newton zu zeigen, deshalb werden wir die Lösung wählen, welche - bei geringen Geschwindigkeiten der beiden Körper - am wenigsten von diesem Gesetz abweicht.

5. Wir werden uns anstrengen es auf eine Weise zu gestalten, damit t stets negativ ist; wenn wir uns auch vorstellen können, dass der Gravitationseffekt eine bestimmte Zeit für die Ausbreitung benötigt, so würde es schwer zu verstehen sein, wie dieser Effekt von der *noch nicht erreichten* Position des anziehenden Körpers abhängen kann.

Es gibt einen Fall, wo die Unbestimmtheit des Problems verschwindet; es ist derjenige wo die beiden Körper in relativer Ruhe zueinander sind, das heißt wo:

$$\xi = \xi_1, \quad \eta = \eta_1, \quad \zeta = \zeta_1;$$

das ist nun der Fall den wir zuerst untersuchen werden, indem wir annehmen dass ihre Geschwindigkeiten konstant sind, und zwar auf eine Weise, bei der die beiden Körper in einer gemeinsamen, geradlinigen, und gleichförmigen Translationsbewegung begriffen sind.

Wir können annehmen, dass die x-Achse parallel zu dieser Translation ist, und zwar derart, dass $\eta = \zeta = 0$, und wo wir $\varepsilon = -\xi$ setzen.

Wenn wir unter diesen Bedingungen die Lorentz-Transformation anwenden - wobei nach der Transformation die beiden Körper in Ruhe sein werden - dann erhalten wir

$$\xi' = \eta' = \zeta' = 0$$

Dann sollten die Komponenten X_1', Y_1', Z_1' in Übereinstimmung mit dem Gesetz von Newton sein - mit Ausnahme eines konstanten Faktors:

$$(3) \qquad \begin{cases} X_1' = -\dfrac{x'}{r'^3}, \quad Y_1' = -\dfrac{y'}{r'^3}, \quad Z_1' = -\dfrac{z'}{r'^3}, \\ r'^2 = x'^2 = y'^2 + z'^2. \end{cases}$$

Jedoch gemäß §1 haben wir:

$$x' = k(x + \varepsilon t), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = k(t + \varepsilon x),$$

$$\frac{\rho'}{\rho} = k(1 + \xi\varepsilon) = k\left(1 - \varepsilon^2\right) = \frac{1}{k}, \quad \sum X_1 \xi = -X_1 \varepsilon,$$

$$X_1' = k\frac{\rho}{\rho'}\left(X_1 + \varepsilon \sum X_1 \xi\right) = k^2 X_1 \left(1 - \varepsilon^2\right) = X_1,$$

$$Y_1' = \frac{\rho}{\rho'} Y_1 = kY_1,$$

$$Z_1' = kZ_1.$$

Wir haben zusätzlich:

$$x + \varepsilon t = x - \xi t, \quad r'^2 = k^2(x - \xi t)^2 + y^2 + z^2$$

und

$$(4) \qquad X_1 = \frac{-k(x-\xi t)}{r'^3}, \quad Y_1 = \frac{-y}{kr'^3}, \quad Z_1 = \frac{-z}{kr'^3};$$

was so geschrieben werden kann:

$$(4^{bis}) \qquad X_1 = \frac{dV}{dx}, \quad Y_1 = \frac{dV}{dy}, \quad Z_1 = \frac{dV}{dz}; \quad V = \frac{1}{kr'}.$$

Es scheint zuerst, dass die Unbestimmtheit weiterbesteht, da wir keine Hypothese über den Wert von t gemacht haben, das heißt über die Geschwindigkeit der Übermittlung; und abgesehen davon ist x eine Funktion von t; aber es ist leicht zu sehen, dass $x-\xi t,\ y,\ z$, welche in unseren Formeln auftauchen, nicht von t abhängig sind.

Wenn die beiden Körper in einer gemeinsamen Translation begriffen sind sehen wir, dass die auf den angezogenen Körper wirkende Kraft senkrecht zu einer Ellipse ist, in deren Zentrum der anziehende Körper liegt.

Um weiter zu gelangen ist es notwendig, die *Invarianten der Lorentz-Gruppe* aufzufinden.

Wir wissen, dass die Substitutionen dieser Gruppe (unter der Annahme $l=1$) die linearen Substitutionen sind, welche die quadratische Form unverändert lassen:

$$x^2+y^2+z^2-t^2.$$

Lasst uns andererseits setzen:

$$\xi = \frac{\delta x}{\delta t}, \quad \eta = \frac{\delta y}{\delta t}, \quad \zeta = \frac{\delta z}{\delta t};$$

$$\xi_1 = \frac{\delta_1 x}{\delta_1 t}, \quad \eta_1 = \frac{\delta_1 y}{\delta_1 t}, \quad \zeta_1 = \frac{\delta_1 z}{\delta_1 t};$$

wir sehen, dass die Lorentz-Transformation dafür sorgt, dass $\delta x,\ \delta y,\ \delta z,\ \delta t$ und $\delta_1 x,\ \delta_1 y,\ \delta_1 z,\ \delta_1 t$ den selben linearen Subsitutionen unterworfen sind wie $x,\ y,\ z,\ t$.

Wir betrachten

$$\begin{array}{cccc} x, & y, & z, & t\sqrt{-1}, \\ \delta x, & \delta y, & \delta z, & \delta t\sqrt{-1}, \\ \delta_1 x, & \delta_1 y, & \delta_1 z, & \delta_1 t\sqrt{-1}, \end{array}$$

als die Koordinaten der 3 Punkte $P,\ P',\ P''$ in einem Raum von 4 Dimensionen. Wie sehen dass die Lorentz-Transformation eine Rotation in diesem Raum um den als unveränderlich betrachteten Ursprung ist. Wir werden folglich keine anderen verschiedenen Invarianten haben als die 6 Abstände der 3 Punkte $P,\ P',\ P''$, getrennt voneinander betrachtet und vom Ursprung, oder wem es besser gefällt, als die 2 Ausdrücke:

$$x^2+y^2+z^2-t^2, \quad x\delta x + y\delta y + z\delta z - t\delta t,$$

oder die 4 Ausdrücke der selben Form, welche durch eine beliebige Vertauschung der 3 Punkte $P,\ P',\ P''$ abgeleitet werden.

Aber wir suchen die Funktionen der 10 Variablen (2), welche die Invarianten sind; also müssen wir unter den Kombinationen unserer 6 Invarianten diejenigen suchen, welche nicht von den 10 Variablen abhängig sind, das heißt welche homogen vom Grad 0 sind in Bezug sowohl zu $\delta x,\ \delta y,\ \delta z,\ \delta t$, als auch zu $\delta_1 x,\ \delta_1 y,\ \delta_1 z,\ \delta_1 t$. Es bleiben uns dann 4 unterschiedliche Invarianten, welche sind:

$$(5)\qquad \sum x^2 t^2, \quad \frac{t-\sum x\xi}{\sqrt{1-\sum\xi^2}}, \quad \frac{t-\sum x\xi_1}{\sqrt{1-\sum\xi_1^2}}, \quad \frac{t-\sum\xi\xi_1}{\sqrt{(1-\sum\xi^2)\,(1-\sum\xi_1^2)}}.$$

Als nächstes sehen wir, wie die Kraftkomponenten transformiert werden; wir erinnern uns an die Gleichungen (11) von §1, welche sich nicht auf die derzeit betrachtete Kraft $X_1,\ Y_1,\ Z_1$ beziehen, sondern auf die Kraft $X,\ Y,\ Z$ per Volumeneinheit. Wir setzen weiters:

$$T = \sum X\xi;$$

wir sehen dass (11) so geschrieben werden kann (bei $l = 1$):

$$(6)\qquad \begin{cases} X' = k(X+\varepsilon T), & T' = k(T+\varepsilon X), \\ Y' = Y, & Z' = Z; \end{cases}$$

also auf eine Weise, wodurch $X,\ Y,\ Z,\ T$ der selben Transformation unterworfen sind wie $x,\ y,\ z,\ t$. Folglich ergeben sich die Gruppeninvarianten mit

$$\sum X^2 - T^2, \quad \sum Xx - Tt, \quad \sum X\delta x - T\delta t, \quad \sum X\delta_1 x - T\delta_1 t.$$

Jedoch benötigen wir nicht $X,\ Y,\ Z$, sondern $X_1,\ Y_1,\ Z_1$ mit

$$T_1 = \sum X_1\xi.$$

Wir sehen dass

$$\frac{X_1}{X} = \frac{Y_1}{Y} = \frac{Z_1}{Z} = \frac{T_1}{T} = \frac{1}{\rho}.$$

Die Lorentz-Transformation wird deswegen auf die selbe Weise auf $X_1,\ Y_1,\ Z_1,\ T_1$ wirken wie auf $X,\ Y,\ Z,\ T$, außer dass diese Ausdrücke zusätzlich multipliziert werden mit

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{1}{k(1+\xi\varepsilon)} = \frac{\delta t}{\delta t'}.$$

Ebenso wird die Lorentz-Transformation auf die selben Weise auf $\xi,\ \eta,\ \zeta,\ 1$ wirken wie auf $\delta x,\ \delta y,\ \delta z,\ \delta t$, außer dass diese Ausdrücke zusätzlich durch den *selben* Faktor multipliziert werden:

$$\frac{\delta t}{\delta t'} = \frac{1}{k(1+\xi\varepsilon)}.$$

Als nächstes werden wir $X,\ Y,\ Z,\ T\sqrt{-1}$ als die Koordinaten eines vierten Punktes Q betrachten; die Invarianten werden dann Funktionen der gegenseitigen Abstände der fünf Punkte sein:

$$0, \quad P, \quad P', \quad P'', \quad Q$$

und unter diesen Funktionen müssen wir nur diese behalten, welche einerseits homogen vom Grad 0 sind in bezug zu

$$X, \quad Y, \quad Z, \quad T, \quad \delta x, \quad \delta y, \quad \delta z, \quad \delta t$$

(die Variablen können ferner ersetzt werden durch $X_1,\ Y_1,\ Z_1,\ T_1,\ \xi,\ \eta,\ \zeta,\ 1$), und andererseits in bezug zu

$$\delta_1 x, \quad \delta_1 y, \quad \delta_1 z, \quad 1$$

(die Variablen können ferner ersetzt werden durch $\xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1,\ 1$).

Jenseits der vier Invarianten (5), finden wir auf diese Weise vier neue verschiedene Invarianten, welche lauten:

$$(7) \qquad \frac{\sum X_1^2 - T_1^2}{1-\sum \xi^2}, \quad \frac{\sum X_1 x - T_1 t}{\sqrt{1-\sum \xi^2}}, \quad \frac{\sum X_1 \xi_1 - T}{\sqrt{1-\sum \xi^2}\sqrt{1-\sum \xi_1^2}}, \quad \frac{\sum X_1 \xi - T_1}{1-\sum \xi^2}.$$

Die letzte Invariante ist gemäß der Definition von T_1 immer Null.

Wenn das alles gegeben ist, welche Bedingungen müssen nun erfüllt sein?

1° Der erste Ausdruck von (1), welcher die Ausbreitungsgeschwindigkeit definiert, muss eine Funktion der 4 Invarianten (5) sein.

Es können offenbar eine Reihe von Hypothesen erstellt werden; wir werden davon zwei untersuchen:

A) Wir können setzen:

$$\sum x^2 - t^2 = r^2 - t^2 = 0,$$

wodurch $t = \pm r$, und da t negativ sein muss, $t = -r$. Das heißt, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit der des Lichtes gleicht. Es scheint, dass diese Hypothese gleich verworfen werden müsste. Laplace zeigte nämlich, dass die Ausbreitung entweder instantan oder sehr viel schneller als die des Lichtes erfolgt. Jedoch untersuchte Laplace die Hypothese der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit *ceteris non mutatis*; im Gegensatz dazu sind hier dieser Hypothese viele andere beigefügt, und es kann sein, dass zwischen ihnen eine mehr oder weniger vollständige Kompensation stattfindet. Die Anwendung der Lorentz-Transformation hat uns bereits viele solcher Beispiele gezeigt.

B) Wir können setzen

$$\frac{t-\sum x\xi_1}{\sqrt{1-\sum \xi_1^2}} = 0, \quad t = \sum x\xi.$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist deshalb sehr viel schneller als die des Lichtes, aber t könnte in bestimmten Fällen negativ sein, was - wie wir schon erwähnten - nur schwer akzeptiert werden kann. Wir werden deshalb an unserer Hypothese (A) festhalten.

2° Die vier Invarianten (7) sollten Funktionen der Invarianten (5) sein.

3° Wenn die beiden Körper in absoluter Ruhe sind, sollten $X_1,\ Y_1,\ Z_1$ die durch Newtons Gesetz gegebenen Werte haben, und wenn sie in Ruhe sind, sollten sie die Werte von (4) haben.

Für den Fall absoluter Ruhe sollten sich die beiden ersten Invarianten (8) reduzieren auf:

$$\sum X_1^2, \quad \sum X_1 x,$$

oder gemäß Newtons Gesetz auf

$$\frac{1}{r^4}, \quad -\frac{1}{r};$$

zusätzlich erhalten gemäß Hypothese (A) die zweite und dritte Invariante die Form:

$$\frac{-r-\sum x\xi}{\sqrt{1-\sum\xi^2}}, \quad \frac{-r-\sum x\xi_1}{\sqrt{1-\sum\xi_1^2}},$$

also bei absoluter Ruhe,

$$-r, \quad -r.$$

Wir werden deshalb *beispielsweise* anerkennen, dass die ersten beiden Invarianten von (7) sich reduzieren auf

$$\frac{\left(1-\sum x\xi_1^2\right)^2}{\left(r+\sum x\xi_1\right)^4}, \quad -\frac{\sqrt{1-\sum\xi_1^2}}{r+\sum x\xi_1},$$

obwohl andere Kombinationen möglich sind.

Es muss eine Wahl zwischen diesen Kombination getroffen werden, und zusätzlich brauchen wir eine dritte Gleichung um $X_1,\ Y_1,\ Z_1$ zu definieren. Durch diese Wahl sollten wir versuchen, uns so nahe wie möglich dem Gesetz von Newton anzunähern. Lasst uns sehen was passiert, wenn wir die Quadrate der Geschwindigkeiten $\xi,\ \eta$, etc. vernachlässigen (wobei weiterhin $t=-r$ gesetzt wird). Aus den 4 Invarianten (5) wird dann:

$$0, \quad -r-\sum x\xi, \quad -r-\sum x\xi_1, \quad 1$$

und die 4 Invarianten (7) werden dann:

$$\sum X_1^2, \quad \sum X_1(x+\xi r), \quad \sum X_1\left(\xi_1-\xi\right), \quad 0.$$

Bevor wir einen Vergleich mit Newtons Gesetz anstellen können, wird eine andere Transformation benötigt. In dem betreffenden Fall stellen $x_0+x,\ y_0+y,\ z_0+z$ die Koordinaten des anziehenden Körpers zum Zeitpunkt t_0+t dar, und $r=\sqrt{\sum x^2}$. Bei Newtons Gesetz haben wir die Koordinaten $x_0+x_1,\ y_0+y_1,\ z_0+z_1$ des anziehenden Körpers zum Zeitpunkt t_0 und der Entfernung $r_1=\sqrt{\sum x^2}$ zu berücksichtigen.

Wir können das Quadrat der für die Ausbreitung benötigten Zeit t vernachlässigen, und folglich so fortfahren, als ob die Bewegung gleichförmig wäre; wir haben dann:

$$x=x_1+\xi_1 t, \quad y=y_1\eta_1 t, \quad z=z_1\zeta_1 t, \quad r\left(r-r_1\right)=\sum x\xi_1 t;$$

oder, da $t=-r$,

$$x=x_1-\xi_1 r, \quad y=y_1-\eta_1 r, \quad z=z_1-\zeta_1 r, \quad r=r_1-\sum x\xi_1;$$

so dass unsere 4 Invarianten (4) die Form erhalten:

$$0, \quad -r_1+\sum x\left(\xi_1-\xi\right), \quad -r_1, \quad 1$$

und unsere 4 Invarianten (7) erhalten die Form:

$$\sum X_1^2, \quad \sum X_1\left[x_1+\left(\xi-\xi_1\right)r_1\right], \quad \sum X_1\left(\xi_1-\xi\right), \quad 0.$$

Bei der zweiten dieser Ausdrücke schrieb ich r_1 anstatt r, weil r mit $\xi - \xi_1$ multipliziert wird, und weil ich das Quadrat von ξ vernachlässige.

Für diese 4 Invarianten (7) würde sich aus Newtons Gesetz ergeben:

$$\frac{1}{r_1^4}, \quad -\frac{1}{r_1} - \frac{\sum x_1(\xi - \xi_1)}{r_1^2}, \quad \frac{\sum x_1(\xi - \xi_1)}{r_1^3}, \quad 0.$$

Wenn wir deshalb die zweite und dritte der Invarianten (5) mit A und B bezeichnen, und die ersten 3 Invarianten von (7) mit M, N, P, dann wird Newtons Gesetz für Ausdrücke, deren Größenordnung annähernd vom Quadrat der Geschwindigkeit abhängt, erfüllt sein indem gesetzt wird:

$$(8) \qquad M = \frac{1}{B^4}, \quad N = \frac{+A}{B^2}, \quad P = \frac{A-B}{B^3}.$$

Die Lösung ist nicht die einzige. Es sei C die vierte Invariante in (5); $C-1$ entspricht der vom Quadrat von ξ abhängigen Größenordung, und das selbe trifft auf $(A-B)^2$ zu.

Wir können deshalb auf der rechten Seite aller Gleichungen (8) einen Ausdruck hinzufügen, der aus C-1 multipliziert mit einer beliebigen Funktion von A, B, C besteht; und einen Ausdruck bestehend aus (A-B)², welcher ebenfalls mit einer beliebigen Funktion von A, B, C multipliziert wird.

Die Lösung (8) erscheint zuerst als die einfachste, trotzdem kann sie nicht verwendet werden. Tatsächlich, da M, N, P Funktionen von X_1, Y_1, Z_1 sind, und $T_1 = \sum X_1 \xi$, dann können die Werte von X_1, Y_1, Z_1 von diesen drei Gleichungen (8) abgeleitet werden, jedoch in bestimmten Fällen würden diese Werte imaginär werden.

Um diese Schwierigkeit zu vermeiden, werden wir auf eine andere Weise fortfahren. Es sei gegeben:

$$k_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\sum \xi^2}}, \quad k_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\sum \xi_1^2}},$$

was gerechtfertigt ist durch die Analogie mit der Notation:

$$k = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

welche in der Lorentz-Substitution dargestellt wird.

In diesem Fall, und in Anbetracht der Bedingung $-r = t$, werden die Invarianten (5) zu:

$$0, \quad A = -k_0(r + \sum x\xi), \quad B = -k_1(r + \sum x\xi_1), \quad C = k_0 k_1((1 - \sum \xi\xi_1).$$

Andererseits sehen wir, dass das folgende System mit den Werten:

$$\begin{array}{cccc} x, & y, & z, & -r = t \\ k_0 X_1 & k_0 Y_1 & k_0 Z_1 & k_0 T_1 \\ k_0 \xi & k_0 \eta & k_0 \zeta & k_0 \\ k_1 \xi_1 & k_1 \eta_1 & k_1 \zeta_1 & k_1 \end{array}$$

den *selben* linearen Substitutionen unterworfen ist, wie es der Fall ist, wenn die Transformationen der Lorentz-Gruppe auf sie angewendet werden. Wir werden dazu gebracht zu setzen:

$$
(9) \qquad \begin{cases}
X_1 = x\dfrac{\alpha}{k_0} + \xi\beta + \xi_1\dfrac{k_1}{k_0}\gamma, \\[2ex]
Y_1 = y\dfrac{\alpha}{k_0} + \eta\beta + \eta_1\dfrac{k_1}{k_0}\gamma, \\[2ex]
Z_1 = z\dfrac{\alpha}{k_0} + \zeta\beta + \zeta_1\dfrac{k_1}{k_0}\gamma, \\[2ex]
T_1 = -r\dfrac{\alpha}{k_0} + \beta + \dfrac{k_1}{k_0}\gamma,
\end{cases}
$$

Es ist klar, dass wenn $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ die Invarianten sind, dann erfüllen $X_1,\ Y_1,\ Z_1,\ T_1$ die fundamentalen Bedingungen, das heißt sie sind durch die Wirkung der Lorentz-Tranformation einer entsprechenden linearen Substitution unterworfen.

Jedoch damit die Gleichungen (9) kompatibel sind, ist es notwendig zu setzen:

$$\sum X_1\xi - T_1 = 0,$$

so dass sich - durch Ersetzen von X_1, Y_1, Z_1, T_1 mit ihren Werten (9) und durch Multiplikation mit k_0^2 - ergibt:

$$(10) \qquad -A\alpha - \beta - C\gamma = 0.$$

Wir wollen - wenn im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit die Quadrate der Geschwindigkeit ξ etc. und die Produkte von Beschleunigung und Entfernung vernachlässigbar sind - dass die Werte von X_1, Y_1, Z_1 in Übereinstimmung mit Newtons Gesetz bleiben.

Wir können annehmen:

$$\beta = 0, \quad \gamma = -\frac{A\alpha}{C}.$$

Bei der angenommenen Näherung ergibt sich:

$$k_0 = k_1 = 1, \quad C = 1, \quad A = -r_1 + \sum x(\xi_1 - \xi), \quad B = -r_1,$$
$$x = x_1 + \xi_1 t = x_1 - \xi_1 r.$$

Die erste Gleichung (9) ergibt dann:

$$X_1 = \alpha(x - A\xi_1).$$

Aber wenn man das Quadrat von ξ vernachlässigt, kann man $A\xi_1$ mit $-r_1\xi_1$ oder mit $-r\xi_1$ ersetzen, so dass sich ergibt:

$$X_1 = \alpha(x + \xi_1 r) = \alpha x_1.$$

Newtons Gesetz würde ergeben:

$$X_1 = -\frac{x_1}{r_1^3}.$$

Wir müssen deshalb für die Invariante α jene wählen, durch welche sie sich reduziert auf $-\frac{1}{r_1^3}$ bei der angenommenen Näherung, das heißt $\frac{1}{B^3}$. Die Gleichungen (9) ergeben:

$$(11) \qquad \begin{cases} X_1 = \dfrac{x}{k_0 B^3} - \xi_1 \dfrac{k_1}{k_0} \dfrac{A}{B^3 C}, \\[2ex] Y_1 = \dfrac{y}{k_0 B^3} - \eta_1 \dfrac{k_1}{k_0} \dfrac{A}{B^3 C}, \\[2ex] Z_1 = \dfrac{z}{k_0 B^3} - \zeta_1 \dfrac{k_1}{k_0} \dfrac{A}{B^3 C}, \\[2ex] T_1 = -\dfrac{r}{k_0 B^3} - \dfrac{k_1}{k_0} \dfrac{A}{B^3 C}. \end{cases}$$

Wir bemerken zuerst, dass die korrigierte Anziehung aus zwei Komponenten besteht: eine parallel zu dem Vektor, welcher die Positionen der beiden Körper verbindet, und die andere parallel zu der Geschwindigkeit des anziehenden Körpers.

Man erinnere sich, dass wenn wir über die Position und die Geschwindigkeit des anziehenden Körpers sprechen, dann bezieht sich das auf die Position und die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt der Entstehung der Gravitationswelle; im Gegensatz dazu bezieht sich das für den angezogenen Körper auf die Position und die Geschwindigkeit zu dem Zeitpunkt der Ankunft der Welle, unter der Annahme, dass sich die Welle mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet.

Ich glaube, dass es voreilig sein würde zu versuchen, die Diskussion dieser Formeln weiter zu führen; ich werde mich deshalb auf einige Bemerkungen beschränken.

1° Die Lösungen (11) sind nicht einzigartig; tatsächlich, wir können den allgemeinen Faktor $\frac{1}{B^3}$ ersetzen durch:

$$\frac{1}{B^3} + (C-1) f_1(A,B,C) + (A-B)^2 f_2(A,B,C)$$

wo f_1 und f_2 beliebige Funktion von A, B, C sind. Alternativ können wir weiterhin β gleich Null setzen, jedoch irgendwelche zusätzliche Ausdrücke zu α, β, γ hinzufügen, welche die Bedingung (10) erfüllen, und welche von zweiter Ordnung in Bezug zu ξ für α, und von erster Ordnung für β und γ sind.

2° Die erste Gleichung (11) kann geschrieben werden:

$$(11^{bis})) \qquad X_1 \left[x(1 - \sum \xi \xi_1) + \xi_1 (r + \sum x \xi) \right]$$

und die Größe in den eckigen Klammern kann geschrieben werden:

$$(12) \qquad (x + r\xi_1) + \eta\,(\xi_1 y - x\eta_1) + \zeta\,(\xi_1 z - x\zeta_1),$$

und zwar auf auf eine Weise, wodurch die gesamte Kraft in drei Komponenten aufgeteilt werden kann, und damit den drei eingeklammerten Werten von Ausdruck (12) entsprechen; die erste Komponente ist ungefähr analog zu der mechanischen Kraft verursacht durch das elektrische Feld, die zwei anderen zu der mechanischen Kraft verursacht durch das magnetische Feld; um die Analogie zu erweitern kann ich in Anbetracht der ersten Anmerkung $\frac{1}{B^3}$ in (11) durch $\frac{C}{B^3}$ ersetzen, und zwar derart, dass X_1, Y_1, Z_1 lineare Funktionen der Geschwindigkeit ξ, η, γ des angezogenen Körpers sind, da C im Nenner von (11 bis) verschwunden ist.

Als nächstes setzen wir:

$$
(13) \qquad \begin{cases} k_1(x+r\xi_1)=\lambda, \quad k_1(y+r\eta_1)=\mu \quad k_1(z+r\zeta_1)=\nu, \\ \\ k_1\,(\eta_1 z-\zeta_1 y)=\lambda', \quad k_1\,(\zeta_1 x-\xi_1 z)=\mu', \quad k_1\,(\xi_1 y-x\eta_1)=\nu'; \end{cases}
$$

und da C vom Nenner von (11 bis) verschwunden ist, folgt daraus:

$$
(14) \qquad \begin{cases} X_1=\dfrac{\lambda}{B^3}+\dfrac{\eta\nu'-\zeta\mu'}{B^3}, \\ \\ Y_1=\dfrac{\mu}{B^3}+\dfrac{\zeta\lambda'-\xi\nu'}{B^3}, \\ \\ Z_1=\dfrac{\nu}{B^3}+\dfrac{\xi\mu'-\eta\lambda'}{B^3}, \end{cases}
$$

und wir werden weiters haben:

$$
(15) \qquad B^2=\sum\lambda^2-\sum\lambda'^2
$$

Also $\lambda,\ \mu,\ \nu$ oder $\frac{\lambda}{B^3}, \frac{\mu}{B^3}, \frac{\nu}{B^3}$ ist eine Art elektrisches Feld, während $\lambda',\ \mu',\ \nu'$ oder vielmehr $\frac{\lambda'}{B^3}, \frac{\mu'}{B^3}, \frac{\nu'}{B^3}$ eine Art magnetisches Feld ist.

3° Das Relativitätspostulat würde uns dazu bringen, Lösung (11), oder Lösung (14), oder überhaupt irgendeine Lösung unter all jenen anzunehmen, welche auf Basis der ersten Anmerkung hergeleitet werden. Jedoch ist die erste zu stellende Frage, ob oder ob diese Lösungen nicht mit den astronomischen Beobachtungen verträglich sind. Die Abweichung von Newtons Gesetz ist von der Ordnung ξ^2, das heißt 10000 mal kleiner, als wenn sie von der Ordnung ξ wäre; das heißt wenn die Ausbreitung mit Lichtgeschwindigkeit erfolgen würde, *ceteris non mutatis*; folglich ist es gerechtfertigt zu hoffen, dass sie nicht zu groß sein wird. Um diese Frage zu klären, wäre jedoch eine ausführliche Diskussion notwendig.

Juli, 1905

Anmerkungen

Für weitere Informationen siehe:
http://de.wikipedia.org/wiki/Lorentzsche_Äthertheorie.
http://de.wikipedia.org/wiki/Geschichte_der_speziellen_Relativitätstheorie